Письма в ЖЭТФ, том 35, вып.12, стр. 540–542 *20 июня 1982 г.*

О ПРОСТРАНСТВАХ РАССЛОЕНИЙ ВУ – ЯНГА

М.А.Соловьев

Рассмотрены пространства расслоений, возникающих в задаче о рассеянии заряженной частицы на дираковском монопоне. Показано, что они являются линзовыми пространствами, и описана их топология.

Ву и Янг показали [1], что последовательное рассмотрение рассеяния заряженной частицы на монополе требует техники теории расслоений. Цель данной статьи – выяснить геометрический смысл топологического числа $n = 2e\mu$, задающего расслоения Ву – Янга. Это может быть полезным для качественного исследования амплитуды рассеяния и при поиске для нее новых представлений. Плохая сходимость разложения амплитуды по обобщенным сферическим функциям делает, видимо, необходимым более полное использование топологических соображений. Будет показано, что геометрия задачи разная для разных n. В случае $n = 1$ это геометрия сферы, для $n = 2$ проективного пространства, а в общем случае – так называемых линзовых пространств.

Напомним [1], что причина появления расслоений в сингулярности вектор-потенциала монополя. Например, если он задается формулами $A_r = A_\theta = 0$, $A_\varphi = (\mu/r)\mathrm{tg}(\theta/2)$, то нитью особенностей служит полуось $\theta = \pi$, а если tg заменить на $-$ctg, такую же роль играет полуось $\theta = 0$. Отличаются эти два описанчя на $2\mu\nabla\varphi(x)$, где φ – азимутальный угол. В уравнении Шредингера для частицы в поле монополя также будет сингулярность, если пользоваться одной калибровкой во всем пространстве. Но можно рассмотреть пару уравнений, каждую в области непрерывности своего вектор-потенциала. Обозначим эти области через V и V'. В их пересечении соответствующие волновые функции связаны калибровочным преобразованием

$$\Psi(x) = \Psi'(x)\exp(2ie\mu\varphi(x)) \tag{1}$$

и обе непрерывны, откуда следует условие квантования Дирака для произведения электрического и магнитного зарядов $2e\mu = n$ (целое число). К расслоениям приводит геометрическая идея склеивания графиков волновых функций Ψ, Ψ' в одну непрерывную поверхность. Равносильным образом, можно склеить прямые произведения с калибровочной группой $V \times U(1)$, $V' \times U(1)$, считая пары (x, g), (x', g') эквивалентными, если $x = x'$, $g = g'\exp(in\varphi(x))$. Возникающее топологическое пространство называют пространством главного расслоения. Пусть t – его точка. Положим

$$\Phi(t) = \begin{cases} g^{-1}\Psi(x) \\ \\ g'^{-1}\Psi'(x') \end{cases} . \tag{2}$$

Там, где работают обе формулы (2), они дают одинаковый результат. Поэтому получается единая функция, а пару прежних уравнений Шредингера можно заменить одним на новом пространстве.

Функция склейки $e^{in\varphi}$ задает эти пространства неявным образом. Чтобы получить явное задание, надо воспользоваться другой реализацией главных расслоений, как расслоений на орбиты относительно свободного действия калибровочной группы [2]. Задача упрощается тем, что база расслоений Ву – Янга, которой служит R^3 за вычетом точки нахождения монополя, гомотопически эквивалентна сфере S^2. Поэтому достаточно рассмотреть их сужения на сферу, а они цолжны сводиться к расслоению Хопфа, которое универсально для двумерных баз и группы

$U(1)$. Расслоением Хопфа называют расслоение на орбиты трехмерной сферы $S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ в комплексном пространстве C^2 относительно действия $U(1)$ по правилу $(z_1, z_2)e^{i\varphi} = (z_1 e^{i\varphi}, z_2 e^{i\varphi})$. Базой его служит S^2. Именно, отобразим S^3 в S^2, со поставив паре (z_1, z_2) число z_1 / z_2 и переводя его затем в S^2 с помощью стереографиче кой проекции. По непрерывности это отображение продолжается и на $z_2 = 0$. Видно, что про разом каждой точки S^2 служит одна орбита. Оказывается, расслоение Хопфа эквивалентн расслоению Ву – Янга для $n = 1$. Чтобы в этом убедиться, достаточно построить два его лок ных сечения σ, σ', связанных функцией перехода, совпадающей с функцией склейки $e^{i\varphi}$. Первое сечение зададим формулами

$$z_1 = \cos\frac{\theta}{2}\ , \quad z_2 = \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}, \theta \neq \pi\ . \tag{3}$$

Второе получим, положив

$$z_1 = \cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}, \ z_2 = \sin\frac{\theta}{2}\ , \ \theta \neq 0. \tag{4}$$

Эквивалентность означает, в частности, что пространство расслоения Ву – Янга при $n = 1$ го меоморфно S^3.

Остается построить пространства для остальных топологических чисел. Это можно сделать прямым применением конструкции универсального расслоения [2], отождествив базу S^2 с к плексной плоскостью и взяв прообразы расслоений Хопфа относительно степенных отображ ний $z \to z^n$. Однако более удобное представление получается другим путем. Рассмотрим связь расслоения Хопфа с проективным пространством RP^3. Оно получается из S^3 отожде твлением противоположных точек, т.е. служит факторпространством S^3 / Z_2. Его элемент будем обозначать квадратными скобками. Чтобы превратить RP^3 в главное расслоение, дос таточно задать на нем действие группы $U(1)$. Однако просто перенести его из S^3 нельзя, п кольку такое действие не будет свободным. Свобода действия означает, что все элементы, г пы, за исключением единицы, должны сдвигать каждую точку, – только тогда оно порождае главное расслоение. Поэтому правильная формула такова

$$[z_1, z_2]e^{i\varphi} = [z_1 e^{i\varphi/2}, z_2 e^{i\varphi/2}]. \tag{5}$$

Сечения этого расслоения получаются из сечений расслоения Хопфа (3), (4). Имеем

$$[\sigma'] = [\sigma e^{i\varphi}] = [\sigma] e^{2i\varphi}\ . \tag{6}$$

Значит, функцией перехода в данном случае служит $e^{2i\varphi}$, и RP^3 гомеоморфно пространс расслоения Ву – Янга для $n = 2$.

Перейдем к общему случаю. Определим действие на S^3 циклической группы Z_n, задав действие ее образующей $e^{2\pi i/n}$ формулой

$$(z_1, z_2)e^{2\pi i/n} = (z_1 e^{2\pi i/n}, z_2 e^{2\pi i/n}). \tag{7}$$

Факторпространство $S^3 \div Z_n$ обозначим через L^3_n. Это обобщение проективного пространс ва известно и называется линзами или линзовыми пространствами. Определим действие кал ровочной группы $U(1)$ на L^3_n формулой, аналогичной (5), с заменой $i\varphi/2$ на $i\varphi/n$. Такое действие свободно, и тем самым L^3_n превращается в главное расслоение. Его сечения такж получаются из сечений расслоения Хопфа, и функцией перехода будет $e^{in\varphi}$, что устанавлива гомеоморфность линзы пространству расслоения Ву – Янга этого же индекса. Перечислим топологические свойства этих пространств. Линзы ориентируемы, а их гомотопические группы проще всего вычисляются как раз с помощью теории расслоений, поскольку формула $L^3_n = S^3 / Z_n$ тоже означает главное расслоение, только здесь свободно действует дискретная группа, и орбита состоит из n точек. Такие расслоения называются регулярными накрытиями, и для них известно [2], что если накрывающее пространство односвязно, то фундаментальная группа базы совпадает с действующей группой. Таким образом,

$$\pi_1 (L^3_n) = Z_n . \tag{8}$$

Остальные гомотопические группы одинаковы у базы и накрывающего пространства:

$$\pi_i (L^3_n) = \pi_i (S^3), \; i \geqslant 2. \tag{9}$$

Нетривиальные группы гомологий совпадают с гомотопическими, за исключением нульмерной, равной Z ввиду связности линзы.

Автор благодарен за полезные советы И.С.Шапиро, по инициативе которого рассмотрен этот вопрос, а также Б.Л.Воронову и В.Я.Файнбергу за обсуждение.

Литература

1. *Wu T.T., Yang C.N.* Phys. Rev., 1975, D12, 3845.
2. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 мая 1982 г.