Письма в ЖЭТФ, том 29, вып. 3, стр. 192 – 196 *5 февраля 1979 г.*

СУПЕРСАМОДУАЛЬНОСТЬ

Р.Э.Каллош

Показано, что свойство самодуальности (антисамодуальности) всех входящих в супергравитацию напряженностей полей (спина 1, 3/2, 2) есть простое свойство обращения в нуль некоторого суперполя. Отсюда следует, в частности, отсутствие всех вакуумных расходимостей супергравитации в поле супер- или гравитационного инстантона.

Теория супергравитации ($N = 1$) может быть сформулирована с помощью трех типов суперполей [1, 2]. Имеется реальное аксиально-векторное суперполе $E_{\alpha\dot{\beta}}$ (впервые введенное в [3]), которое среди своих компонент содержит тензор Эйнштейна $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - {}^1/_2\, g_{\mu\nu} R$ (эйнштейновский мультиплет); имеется скалярное киральное комплексное суперполе U, U^*, которое среди своих компонент содержит скалярную кривизну R (скалярный мультиплет); наконец имеется спинорное киральное комплексное суперполе $W_{\alpha\beta\gamma}$, $W^*_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$, где α, $\dot\alpha$ – соответственно непунктирные и пунктирные спинорные индексы, содержащие среди своих компонент конформный ковариантизованный относительно суперпреобразований [2] тензор Вейля (вейлевский мультиплет). Уравнения движения супергравитации имеют вид

$$E_{\alpha\dot\beta} = U = U^* = 0. \tag{1}$$

Для изучения вопросов инстантонной физики нужно изучать супергравитацию в евклидовом режиме. Это можно сделать в соответствии с идеями Хоукинга [4]. Принципиально важный пункт, который возникает при продолжении в евклидову область состоит в том, что операция комплексного сопряжения уже не переводит спиноры с пунктирными индексами в спиноры с непунктирными индексами и наоборот, а они преобразуются независимо. Поэтому величины типа вейлевских спиноров Ψ_{ABCD} и $\overline{\Psi}_{A'B'C'D'}$, введенные Пенроузом [5], являющиеся спинорными эквивалентами самодуальных и соответственно антисамодуальных комбинаций из тензоров Вейля

$$\Psi_{ABCD} \Rightarrow c_{abcd} - \frac{i}{2}\epsilon_{ab}^{\ \ kl} c_{klcd}, \tag{2}$$

$$\overline{\Psi}_{A'B'C'D'} \Rightarrow c_{abcd} + \frac{i}{2}\epsilon_{ab}^{\ \ kl} c_{klcd}, \tag{3}$$

которые в лоренцевском режиме связаны операцией комплексного сопряжения, в евклидовом режиме становятся независимыми

$$\Psi_{ABCD} \Rightarrow c_{abcd} + \frac{1}{2}\epsilon_{ab}^{\ \ kl} c_{klcd}, \tag{4}$$

$$\Psi_{A'B'C'D'} \Rightarrow c_{abcd} - \frac{1}{2}\epsilon_{ab}^{\ \ kl} c_{klcd} \tag{5}$$

и поэтому возникает возможность, что

$$\Psi_{ABCD} \neq 0, \quad \widetilde{\Psi}_{A'B'C'D'} = 0 \tag{6}$$

и наоборот

$$\Psi_{ABCD} = 0, \quad \widetilde{\Psi}_{A'B'C'D'} \neq 0. \tag{6'}$$

Условие (6) в соответствии с (5) означает, что тензор Вейля является самодуальным, т. е.

$$c_{abcd} = {}^*c_{abcd} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}^{\ \ kl} c_{klcd}. \tag{7}$$

Условие (6$'$) есть условие антисамодуальности

$$c_{abcd} = -\overset{*}{c}_{abcd} \, . \tag{7$'$}$$

Киральные суперполя $W_{\alpha\beta\gamma}$ и $\overset{*}{W}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$ являются суперсимметричными обобщениями спиноров Вейля (2), (3), [1, 2], а в евклидовом режиме $W_{\alpha\beta\gamma}$ и $\widetilde{W}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$ обобщают соответственно (4) и (5)

$$W_{\alpha\beta\gamma} = \Phi_{\alpha\beta\gamma} + \Theta^{\delta} W_{\alpha\beta\gamma\delta} + (\Theta\Theta)\Delta_{\alpha\beta\gamma}, \tag{8}$$

$$\widetilde{W}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} = \widetilde{\Phi}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} + \widetilde{\Theta}^{\dot\delta} \widetilde{W}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta} + (\widetilde{\Theta}\widetilde{\Theta})\widetilde{\Delta}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}. \tag{9}$$

В (8), (9), Θ^{δ}, $\widetilde{\Theta}^{\dot\delta}$ – это грассмановы переменные суперполей (в евклидовой области не связанные комплексным сопряжением). Спиноры $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ и $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ связаны с напряженностью поля спина 3/2, а величина $W_{\alpha\beta\gamma\delta}$ содержит кроме спинора Вейля, т. е. напряженности гравитационного поля, еще спинорный эквивалент напряженности вспомогательного аксиально-векторного поля супергравитации A_{μ}.

Основной результат данной работы состоит в том, что условие самодуальности всех этих трех напряженностей имеет вид (сравните с (6))

$$W_{\alpha\beta\gamma} \neq 0, \qquad \widetilde{W}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} = 0, \tag{10}$$

а условие антисамодуальности имеет вид

$$W_{\alpha\beta\gamma} = 0, \qquad \widetilde{W}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} \neq 0 \, . \tag{11}$$

Причина, по которой условия (анти)-самодуальности имеют столь простой вид в терминах спиноров, описывающих римановы величины, состоит в следующем. Антисимметричный тензор с лоренцевыми индексами переводится в свой спинорный эквивалент с помощью матриц $\widetilde{\sigma}^{ab}_{\dot\alpha\dot\beta}$, $\sigma^{ab}_{\alpha\beta}$, обладающих по построению свойством антисамодуальности или соответственно самодуальности

$$\widetilde{\sigma}^{ab}_{\dot\alpha\dot\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ab}_{\ \ cd}\,\widetilde{\sigma}^{cd}_{\dot\alpha\dot\beta}, \tag{12}$$

$$\sigma^{ab}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}_{\ \ cd}\,\sigma^{cd}_{\alpha\beta} \, . \tag{13}$$

Поэтому спинорный эквивалент любого антисимметричного тензора с лоренцевыми индексами (каковыми являются напряженности полей) по построению связан с самодуальной или антисамодуальной комбинацией римановых величин.

Условия (10), (11) имеют тривиальные (в смысле суперсимметрии) примеры. Это самодуальные или антисамодуальные гравитационные инстантоны, интенсивно исследуемые в последнее время [6], и равные нулю поля спина 3/2 и 1. Было бы интересно найти нетривиальные решения (10), (11), т. е. суперинстантоны.

Интересное применение находят условия (10), (11) при анализе расходимостей супергравитации. Как известно, при анализе калибровочно инвариантных расходимостей, можно воспользоваться уравнениями движения (1). Тогда в однопетлевом приближении в супергравитации имеется только тривиальная расходимость, связанная с супертопологическими инвариантами [7], в двухпетлевом приближении расходимости отсутствуют, а в трехпетлевом приближении имеется расходимость, связанная с суперполем [8, 1]

$$W_{\alpha\beta\gamma}W^{\alpha\beta\gamma}\widetilde{W}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}\widetilde{W}^{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} . \tag{14}$$

Это суперполе является суперсимметричным конформным обобщением квадрата сохраняющегося бесшпурового тензора Бела – Робинсона [8, 2].

$$T^{2}_{mnab} = [R^{k}{}_{a}{}^{p}{}_{m}R_{kbpn} + {}^{*}R^{k}{}_{a}{}^{p}{}_{m}{}^{*}R_{kbpn}]^2. \tag{15}$$

Как следует из (8), (9), (12), (13) гравитационная часть суперполя (14) имеет вид

$$(c_{abcd} - {}^{*}c_{abcd})^2(c_{klmn} + {}^{*}c_{klmn})^2 \tag{16}$$

и свойство обращения (14) в нуль в поле самодуального и антисамодуального гравитационного или суперинстантона, которое было бы крайне трудно усмотреть в представлении типа (15), в представлении (14), следует тривиально из (10) или (11), или в (16) из (7), (7′).

Детальный анализ показывает, что и все следующие инварианты, соответствующие калибровочно-инвариантным локальным n-петлевым расходимостям супергравитации, в поле само- или антисамодуального инстантона обращаются в ноль. В доказательстве существенно, что в (8), (9), $\Delta_{\alpha\beta\gamma} = \widetilde{\Delta}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} = 0$ на уравнениях движения и поэтому (например, при (10)) суперполя, построенные из $W_{\alpha\beta\gamma}$ и его производных не содержат в D-компоненте вклада от спина 3/2 на уравнениях движения.

Заметим, что квантовая гравитация в отличие от супергравитации не дает таких сокращений расходимостей в поле инстантонов.

Нам кажется, что сделанные в данной работе наблюдения могут стимулировать интерес к топологическому подходу в гравитации и в особенности в супергравитации.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 декабря 1978 г.

Литература

[1] S.Ferrara, B.Zumino. Nucl. Phys., B134, 301, 1978.

[2] S.Ferrara, P. van Nieuwenhuizen. Ecole Normale preprint LPTENS 78/14.

[3] V.Ogievetsky, E.Sokatchev. Nucl. Phys., B124, 309, 1977.

[4] S.W.Hawking. Lectures on Euclidean Quantum Gravity, DAMTP preprint, 1978.

[5] Р.Пенроуз."Структура пространства – времени", М., Мир, 1972.

[6] G.W.Gibbons, S.W.Hawking. Classification of Gravitational Instanton Symmetries. Preprint DAMTP, Novermber 1978.

[7] Р.Каллош. Доклад на Междунар. семинаре по квантовой гравитации, Москва, декабрь 1978 (в печати).

[8] S.Deser, J.H.Kay, K.S.Stelle. Phys. Rev. Lett., 38, 527, 1977.