

Индукционный ток в квантовом кольце

Л. И. Магарилл¹⁾, М. В. Энтин

Институт физики полупроводников Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 29 июня 2004 г.

После переработки 11 августа 2004 г.

С учетом рассеяния электронов на фононах вычислен индукционный ток в одноканальном квантовом кольце, помещенном в квазистационарное магнитное поле.

PACS: 71.70.Ej, 73.50.Jt, 73.63.Hs

Видимо, первой работой, в которой изучалось квантовое несверхпроводящее кольцо, помещенное в переменное магнитное поле, была статья [1], в которой эта модель предлагалась в качестве простой иллюстрации эффекта Джозефсона. Позже квантовые кольца в переменных полях изучались, в частности, в связи с задачами о квантовых насосах, начиная с работы [2], а также в связи с осцилляциями Ааронова-Бома в мезоскопическом режиме [3]. Несмотря на то, что изучение влияния переменного магнитного поля на квантовые объекты достаточно сложно экспериментально осуществить, эти задачи привлекали и продолжают привлекать внимание исследователей. Интерес к этому вопросу не затих, о чем свидетельствуют периодически появляющиеся работы [4–9]. Однако до настоящего времени не исследовано влияние неупругого рассеяния электронов на электрический отклик квантового кольца.

В настоящей работе рассматривается одноканальное квантовое кольцо, помещенное в адиабатически изменяющееся магнитное поле. В таком поле, помимо незатухающего тока, наводится индукционный ток, пропорциональный вихревому электрическому полю. В отличие от незатухающего тока, индукционный ток определяется кинетикой электронов. Мы рассмотрим задачу с учетом рассеяния электронов на фононах. Предполагается, что скорость изменения магнитного поля мала, что позволяет разлагать отклик кругового тока по вихревому электрическому полю, то есть величине временной производной от магнитного потока. Отклик на вихревое поле можно считать кондактансом бесконтактного квантового кольца. В отличие от обычной постановки, кондактанс кольца предполагается измерять бесконтактным способом, в частности, по поглощению высокочастотного электромагнитного поля. Отметим, что стационарный потенциал примесей в кольце не

приводит к настоящему рассеянию, так как из-за сохранения когерентности стационарные состояния электронов в присутствии магнитного поля являются блоховскими с сохраняющимся азимутальным током (в отсутствие магнитного поля – нулевым). Именно поэтому мы остановимся на случае идеального кольца, взаимодействующего с фононами. Поскольку при низких температурах рассеяние на фононах относительно слабое, кондактанс кольца может достигать большой величины, значительно превышающей квант кондактанса. Этим одноканальное кольцо отличается от одноканального микроконтакта, кондактанс которого ограничен сверху величиной кванта из-за неизбежной релаксации электронов в резервуарах.

Постановка задачи. Рассматривается идеальное квантовое кольцо радиусом R из n -полупроводника с квадратичным электронным спектром, помещенное в медленно меняющееся магнитное поле $H(t)$, направленное по оси кольца. Искомый нами эффект является поправкой к незатухающему току $J_0(\Phi)$:

$$J(\Phi) = J_0(\Phi) + G(\Phi)\mathcal{E}. \quad (1)$$

Здесь $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}(t)/c - \text{ЭДС}$, наводимая в кольце переменным магнитным полем, $\Phi(t) = H(t)\pi R^2$ – поток магнитного поля, G – кондактанс кольца. Кондактанс кольца зависит от его размера и величины потока. В пределе большого радиуса кольца кондактанс G , очевидно, должен перейти в кондактанс одномерной системы и перестать зависеть от магнитного потока Φ . Мы будем разлагать все выражения по $\dot{\Phi}$.

Состояния электронов в отсутствие рассеяния можно описывать адиабатическими (мгновенными) термами ϵ_ν . В частности, в отсутствие спин-орбитального взаимодействия состояния электронов ν характеризуются проекцией углового момента m на ось кольца z и спиновым числом $\sigma = \pm 1$, и описываются адиабатическими термами $\epsilon_\nu = (m +$

¹⁾e-mail: levma@isp.nsc.ru

$+\phi)^2/2m_e R^2 + \sigma g \mu_B H/2$, $\phi = \Phi/\Phi_0$ (поток здесь и далее измеряется в единицах кванта потока $\Phi_0 = 2\pi c/e$, m_e – масса электрона), μ_B – магнетон Бора, g – фактор Ланде; здесь и далее $\hbar = 1$. Уровни с одинаковыми σ пересекаются в точках $\phi = 0, 1/2$.

Оператор угловой скорости содержит величину потока и при его изменении электрический ток в этих состояниях меняется синхронно с потоком [9]. При возрастании потока происходит ускорение электронов, аналогичное бетатронному. Например, если поток меняется линейно со временем, так же линейно возрастает и ток. В то же время, очевидно, что при этом вихревое электрическое поле постоянно; учет релаксации должен привести к постоянному току, наложенному на знакопеременный незатухающий ток. Таким образом, включение релаксации кардинально меняет результат.

Кинетическое уравнение. Мы учтем релаксацию электронов в рамках квантового кинетического уравнения (ККУ). При упрощении ККУ мы будем использовать медленность изменения потока. Это позволяет пренебречь влиянием временной зависимости потока на сам процесс рассеяния. Кроме того, рассеяние рассматривается в низшем порядке теории возмущений. Технически мы воспользовались формой кинетического уравнения из работ [10, 11].

В качестве механизма релаксации мы рассмотрим рассеяние электронов на акустических фононах. Для простоты будем считать, что спектр фононов изотропен, а их взаимодействие с электронами не нарушается наличием границ образца (в частности, для квантового кольца, “захороненного” внутри объемного материала с близкими свойствами). В этом случае гамильтониан взаимодействия одного электрона с фононами имеет вид

$$\mathcal{H}_{e-ph} = \sum_{\mathbf{q}} C_{\mathbf{q}} (e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} b_{\mathbf{q}} + \text{h.c.}). \quad (2)$$

Здесь $b_{\mathbf{q}}$ – оператор уничтожения фонона в состоянии \mathbf{q} . Взаимодействие с фононами описывается величиной $|C_{\mathbf{q}}|^2 = (B_D q + B_P/q)/V$ [12], включающей деформационный ($B_D q$) и пьезо- (аппроксимируется изотропным выражением B_P/q) вклады (V – объем системы). Величины B_D и B_P связаны с временами релаксации импульса в исходном трехмерном кристалле по деформационному τ_{DA} и пьезо- (τ_{DA}) взаимодействиям при температуре и энергии электрона, соответствующим энергии оптического фонона ω_0 :

$$B_D = \frac{\pi s}{\tau_{DA}(2m_e \omega_0)^{3/2}}, \quad B_P = \frac{2\pi s}{\tau_{PA}(2m_e \omega_0)^{1/2}}. \quad (3)$$

Здесь s – скорость звука.

В представлении состояний $m\sigma$ гамильтониан (2) оказывается диагональным по квантовому числу σ :

$$(e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}})_{m,\sigma;m',\sigma'} = J_{m-m'}(q_{\perp} R) \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (4)$$

Здесь $q_{\perp} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$, $J_n(x)$ – функция Бесселя.

Матрица плотности также диагональна по σ и, ввиду аксиальной симметрии кольца, еще и по m . В результате кинетическое уравнение можно записать для диагональных элементов матрицы плотности $\rho_{\nu\nu} \equiv \rho_{\nu}$:

$$\dot{\rho}_{\nu} = \sum_{\nu'} (w_{\nu'\nu} \rho_{\nu'} (1 - \rho_{\nu}) - w_{\nu\nu'} \rho_{\nu} (1 - \rho_{\nu'})). \quad (5)$$

Вероятность перехода под действием фононов дается выражением

$$w_{\nu'\nu} = \delta_{\sigma\sigma'} \frac{B_D}{4\pi^2} \int d^3 \mathbf{q} \left(q + \frac{\gamma}{q} \right) J_{m-m'}^2(q_{\perp} R) \times \\ \times [N(\omega_q) \delta(\epsilon_{\nu'\nu} + \omega_q) + (N(\omega_q) + 1) \delta(\epsilon_{\nu'\nu} - \omega_q)], \quad (6)$$

где $N(\omega_q) = (\exp(\omega_q/T) - 1)^{-1}$ – равновесная функция распределения фононов, $\epsilon_{\nu'\nu} = \epsilon_{\nu'} - \epsilon_{\nu}$, $\gamma = B_P/B_D$.

Отметим, что $w_{\nu'\nu} = w_{\nu\nu'} \exp(\epsilon_{\nu'\nu}/T)$.

Представим матрицу плотности в виде разложения по неадиабатичности: $\rho_{\nu} = f(\epsilon_{\nu} - \mu) + \rho_{\nu}^{(1)} + \dots$. Первое слагаемое есть квазиравновесная матрица плотности, совпадающая с функцией Ферми $f(x) = (\exp(x/T) + 1)^{-1}$, зависящей от мгновенных значений уровней и подстраивающегося к ним химического потенциала μ ; последний определяется условием постоянства среднего числа электронов в кольце N :

$$\sum_{\nu} f(\epsilon_{\nu} - \mu) = N, \quad \sum_{\nu} \rho_{\nu}^{(1)} = 0. \quad (7)$$

Такой подход справедлив в случае отсутствия спинового расщепления; с учетом последнего из-за различия уровней энергии с разными σ нужно учитывать также сохранение числа электронов с заданным σ , вводя различные уровни Ферми μ_{σ} для спиновых подуровней:

$$\sum_m f(\epsilon_{\nu} - \mu_{\sigma}) = N_{\sigma}, \quad (8)$$

$$\sum_m \rho_{\nu}^{(1)} = 0. \quad (9)$$

Квазиравновесная матрица плотности обращает в нуль правую часть уравнения (5). Линеаризуем уравнение по добавке к матрице плотности, считая скорость изменения потока малой. Производные по времени от $f_{\nu} \equiv f(\epsilon_{\nu} - \mu_{\sigma})$ дают левую часть ККУ:

$$D_\nu = \dot{\phi} \left[\frac{\partial f_\nu}{\partial \mu} \sum_{m'} V_{\nu'} \frac{\partial f_{\nu'}}{\partial \mu} / \sum_{m'} \frac{\partial f_{\nu'}}{\partial \mu} - V_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial \mu} \right], \quad (10)$$

где угловая скорость электрона в состоянии ν есть $V_\nu = \partial \epsilon_\nu / \partial \phi$, а после линеаризации химические потенциалы могут считаться одинаковыми. Выполнение условия сохранения числа частиц (8) обеспечивается равенством $\sum_m D_\nu = 0$. В выражение (10) фактически входит только “орбитальная” часть скорости $(m + \phi) / m_e R$, так как спиновый вклад обращается в нуль.

Результирующее ККУ имеет вид стационарного:

$$\sum_{\nu'} W_{\nu'\nu} \rho_{\nu'}^{(1)} - W_{\nu\nu'} \rho_\nu^{(1)} = D_\nu, \quad (11)$$

где $W_{\nu'\nu} = w_{\nu',\nu}(1 - f_\nu) + w_{\nu\nu'} f_\nu$. Время в этом уравнении выступает в роли параметра, входя в мгновенные значения химического потенциала и спектра через величину потока. Система (11) имеет вырожденное ядро: добавка к квазиравновесной функции распределения, связанная только с изменением уровня Ферми, $\partial f_\nu / \partial \mu \Delta \mu$ обращает левую часть в нуль; однозначное решение системы фиксируется дополнительным условием (9).

После интегрирования находим

$$W_{\nu'\nu} = \delta_{\sigma\sigma'} \frac{B_D}{2\pi s^4} (|\epsilon_{\nu'\nu}|^3 + \gamma s^2 |\epsilon_{\nu'\nu}|) S_{m'-m} (|\epsilon_{\nu'\nu}| R x / s) \times [\theta(\epsilon_{\nu'\nu}) (N(\epsilon_{\nu'\nu}) + 1 - f_\nu) + \theta(\epsilon_{\nu\nu'}) (N(\epsilon_{\nu\nu'}) + f_\nu)], \quad (12)$$

$$S_m(y) = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} J_m^2(xy).$$

При условии $\epsilon_{\nu\nu'} R / s \gg 1$ можно заменить функцию $S_m(y)$ ее асимптотикой при большом аргументе, $S_m(y) \approx 1/2y$.

Кондактанс определяется уравнением

$$G \dot{\phi} = \frac{e^2}{2\pi} \sum_{\nu} V_\nu \rho_\nu^{(1)} \equiv \frac{e^2}{2\pi m_e R} \sum_{\nu} (m + \phi) \rho_\nu^{(1)}. \quad (13)$$

Вычисление кондактанса в отсутствие спинового расщепления. В отсутствие спинового расщепления ($g = 0$) энергетический спектр электронов обладает свойствами:

$$\epsilon_m(\phi) = \epsilon_{-m}(-\phi), \quad (14)$$

$$\epsilon_m(\phi + 1) = \epsilon_{m+1}(\phi). \quad (15)$$

Из первого условия следует, что $W_{m,m'}(-\phi) = W_{-m,-m'}(\phi)$, $\rho_m^{(1)}(-\phi) = -\rho_{-m}^{(1)}(\phi)$, а $G(-\phi) = G(\phi)$. Из второго условия получаем, что $G(\phi + 1) = G(\phi)$.

Эти свойства позволяют аналитически решить систему уравнений (12) при $\phi = 0$ и $\phi = 1/2$. Нетрудно видеть, что при $\phi = 0, 1/2$ приходный член в кинетическом уравнении (11) обращается в нуль. В результате при этих значениях потока находим

$$G(\phi) = \frac{e^2}{\pi} \frac{1}{(m_e R^2)^2} \sum_m \tau_m(\phi) (m + \phi)^2 \frac{\partial f_m}{\partial \mu}, \quad \phi = 0, 1/2, \quad (16)$$

где обратное время релаксации

$$\tau_m^{-1}(\phi) = \sum_{m'} W_{mm'}(\phi). \quad (17)$$

Формулу (16) при $\phi \neq 0, 1/2$ можно понимать как “наивное” решение в приближении времени релаксации. Точный результат находится при помощи численного решения системы алгебраических уравнений (11). При достаточно низкой температуре основной вклад в проводимость определяется парой уровней, скажем a и b , ближайших к уровню Ферми и находящихся по разные стороны от него. В этом случае

$$G = \frac{e^2}{\pi} \frac{(V_a - V_b)^2}{W_{ab} + W_{ba}} \frac{\partial f_a}{\partial \mu} \frac{\partial f_b}{\partial \mu} \left(\frac{\partial f_a}{\partial \mu} + \frac{\partial f_b}{\partial \mu} \right)^{-1}. \quad (18)$$

Из (18) и (12) видно, что кондактанс экспоненциально возрастает при сближении уровней a и b .

На это поведение накладывает фактор, связанный с C_q . Если излучаемая энергия мала, то превалирует пьезовзаимодействие, иначе – деформационное взаимодействие; в обоих пределах вероятность перехода возрастает. Другой фактор, $S_{mm'}(|\epsilon_{mm'}| R / s)$, также влияет на поведение кондактанса: в частности, при большом произведении волнового вектора испускаемого фона на радиус кольца кондактанс испытывает осцилляции.

На рис.1 приведена зависимость кондактанса кольца радиуса 10^{-6} см с одним электроном от потока при различных температурах, полученная в результате численного расчета. Использовались параметры материала GaAs: $\tau_{PA} = 4$ пс, $\tau_{DA} = 8$ пс, $s = 5 \cdot 10^5$ см/с, $\omega_0 = 421$ К. При этих параметрах в проводимости участвуют электроны нижних уровней $m = 0, -1$ и доминирует деформационный механизм рассеяния. Для сравнения при $T = 0.3$ приведен результат в τ -приближении (пунктир), который совпадает с результатом численного решения кинетического уравнения при $\phi = 0, 0.5$ и значительно отличается от него в других точках. Мощный пик при $\phi = 0.5$ обусловлен пересечением уровней. Такой же пик при $\phi = 0$ оказывается подавленным из-за обращения в нуль скорости электрона в состоянии $m = 0$. Осцилляции связаны с соизмеримостью

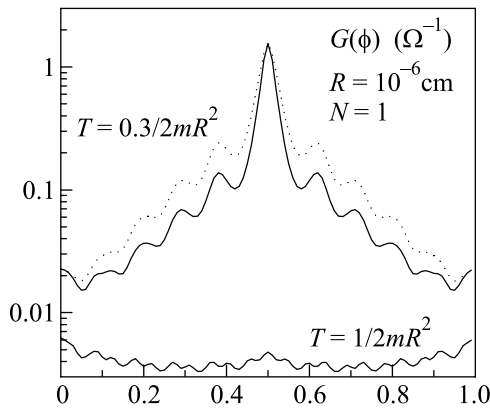


Рис.1. Зависимость кондактанса (в логарифмическом масштабе) от магнитного потока квантового кольца радиуса 10^{-6} см с одним электроном при различных температурах. Пунктир – τ -приближение. Использовались параметры GaAs

длины волны излучаемых фононов и радиуса кольца. Отметим наличие разрыва производной $G(\phi)$ в точках $\phi = 0, 1/2$, обусловленное неаналитичностью вероятности перехода как функции $\epsilon_{\nu\nu'}$ при $\epsilon_{\nu\nu'} = 0$.

На рис.2а и б приведены результаты расчета кондактанса для многоэлектронных квантовых колец радиуса $R = 10^{-6}$ см и $R = 10^{-5}$ см с фиксированным целым числом электронов N . При низкой температуре в точках $\phi = 0, 1/2$ для $N = 4n + 2$ химический потенциал лежит между ближайшими уровнями, для $N \neq 4n + 2$ – на одном из уровней. Если $\phi \neq 0, 1/2$, то уровень Ферми совпадает с уровнем кольца при нечетном N и находится посередине между уровнями при четном N . Это определяет различие в поведении кондактанса для разных N . Для радиуса 10^{-6} см основным механизмом рассеяния является деформационный потенциал, а для 10^{-5} см – пьезопотенциал. Осцилляции, в основном, проявляются при малом радиусе, когда возрастает энергия фонона и уменьшается его длина волны. В этом случае, поскольку в рассеянии участвуют только продольные фононы, несущественна неучтенная размазка осцилляций из-за различия частот фононов разного типа.

Учет спинового расщепления. Поскольку гамильтониан диагонален по спиновым индексам, вклады в ток от различных проекций спина на ось аддитивны. Поэтому кондактанс с учетом расщепления G^s , рассматриваемый как функция химического потенциала и потока, равен сумме кондактансов спиновых компонент. Каждая из спиновых компонент определяется теми же выражениями, как и в отсутствие расщепления со сдвижкой μ на половину спинового расщепления $\mu \rightarrow \mu \pm g\mu_B H/2$:

$$G^s = \frac{1}{2}(G(\mu - \frac{1}{2}g\mu_B H, \phi) + G(\mu + \frac{1}{2}g\mu_B H, \phi)). \quad (19)$$

При заданном целом числе электронов химический потенциал следует определять согласно формуле (7). Формула (19) применима и для случая наклонного магнитного поля, с учетом того, что в спиновое расщепление входит полное магнитное поле, в то время как в поток – только его вертикальная компонента. Отметим, что периодичность по потоку с учетом спинового расщепления имеется, только если рассматривать ϕ и H в качестве независимых аргументов.

Обсуждение. В связи с тем, что при низких температурах мы получили очень большое изменение величины проводимости при изменении магнитного поля, возникает вопрос, не является ли этот результат следствием использованных в работе приближений. Подчеркнем ограничения, связанные с ними. Прежде всего, это адиабатическое приближение. Предполагалось медленное изменение поля, так что $\dot{\phi} \ll \delta\epsilon$. Такое условие нарушается при пересечении уровней. Однако обычно скорость изменения магнитного поля весьма мала и поэтому может сказаться только в очень узкой окрестности точек пересечения уровней.

Предполагалось также, что устанавливается энергетическое равновесие в отсутствие обмена частицами между кольцом и резервуаром. Это условие также легко выполняется за счет достаточно толстых барьеров. Кроме того, учет энергии зарядки кольца приводит к конечному энергетическому барьеру между различными зарядовыми состояниями и к квантованию среднего заряда кольца при низкой температуре (ниже энергии зарядки).

Наиболее существенным ограничением кажется предположение об идеальности кольца. Асимметрия, вызванная флуктуационным потенциалом, неизбежно вызовет расщепление уровней. Пока этот потенциал достаточно слаб, он оказывает влияние только в окрестности точек пересечения уровней $\phi = 0, 1/2$, приводя к обращению в нуль скорости электрона в этих точках; как следствие, обращается в нуль и вклад в кондактанс от ближайших к энергии Ферми уровней и резко уменьшаются пики кондактанса в низкотемпературной области. Если же расщепление уровней, обусловленное магнитным полем, становится больше величины расщепления из-за асимметрии, результат должен переходить в рассмотренный предел идеального кольца. При развитом флуктуационном потенциале в кольце большого радиуса из-за локализации разрешенные зоны становятся экспоненциально узкими; в результате с ростом длины окружности кольца экспоненциально уменьшается средняя скорость электрона и кондактанс.

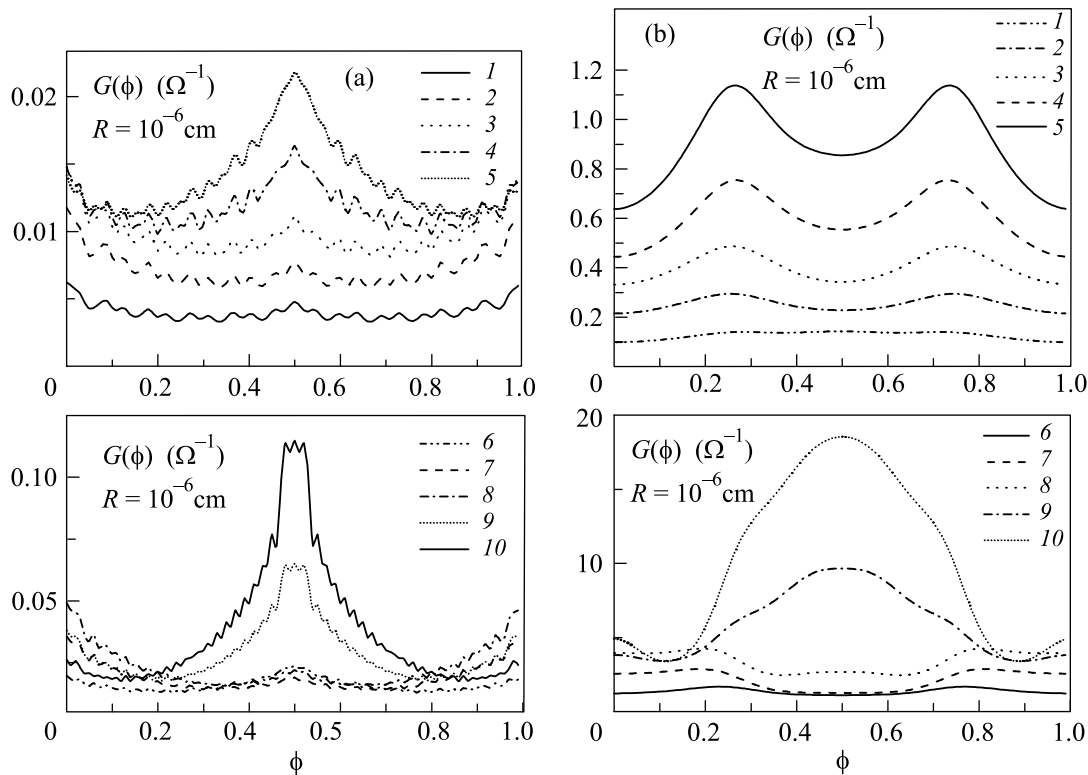


Рис.2. Кондуктанс GaAs квантового кольца с целым числом электронов (отмечено на кривых) в отсутствие спинового расщепления при $T = 1/2m_e R^2$, $R = 10^{-6}$ см (а), и $R = 10^{-5}$ см (б) в зависимости от магнитного поля

В заключение отметим, что изученный в настоящей работе механизм рассеяния приводит к ограничению нарастания тока в идеальном кольце под действием растущего магнитного поля. Результирующий ток определяется диссипативным кондуктансом. Кондуктанс изолированного кольца может достигать значительной величины, намного превышающей квант кондуктанса. При низкой температуре межуровневые переходы подавлены, а только они и вызывают рассеяние. Изменение расстояния между уровнями при изменении магнитного поля приводит к экспоненциально-сильному влиянию на кондуктанс и резким максимумам в зависимости кондуктанса от магнитного поля. Таким образом, кондуктанс одномерного кольца даже в отсутствие спинового расщепления зависит от магнитного поля, в отличие от одномерного проводника. В области слабого магнитного поля магнетокондуктанс $G(\phi) - G(0)$ может быть как отрицательным, так и положительным. Кроме того, в модели с рассеянием на деформационном потенциале может наблюдаться линейная зависимость кондуктанса от магнитного поля.

Работа была поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований # 00-02-

16377, 02-02-16398, Программой поддержки научных школ РФ НИИ-593.2003.2 и INTAS # 03-51-6453.

1. F. Bloch, Phys. Rev. Lett. **21**, 1241 (1968).
2. D. J. Thouless, Phys. Rev. **B27**, 6083 (1983).
3. B. L. Altshuler, A. G. Aronov, D. E. Khmel'nitskii, and A. I. Larkin, in book: *Quantum Theory of Solids*, Ed. I. M. Lifshitz, M.: Mir, 1982.
4. K. B. Efetov, Phys. Rev. Lett. **66**, 2794 (1991).
5. V. E. Kravtsov and V. I. Yudson, Phys. Rev. Lett. **70**, 210 (1993).
6. M. Moskalets and M. Büttiker, Phys. Rev. **B66**, 245321 (2002).
7. L. Arrachea, Phys. Rev. **B66**, 045315 (2002).
8. V. Gudmundsson, Chi-Shung Tang, and A. Manolesku, Phys. Rev. **B67**, 161301(R) (2003).
9. A. V. Chaplik and L. I. Magarill, Laser Phys. **14**, No 3 (2004).
10. Ф. Т. Васьюк, ФТТ **17**, 2288 (1975).
11. И. Б. Левинсон, ЖЭТФ **57**, 660 (1969).
12. В. Ф. Гантмахер, И. Б. Левинсон, *Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках*, М.: Наука, 1984, гл. 4.