

# Влияние анизотропии на запутанность квантовых состояний в спиновой цепочке

П. Ф. Карцев, В. А. Кашурников<sup>1)</sup>

Московский инженерно-физический институт (Государственный университет), 105409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 июня 2004 г.

После переработки 5 августа 2004 г.

Изучается влияние анизотропии взаимодействия спиновой цепочки в XXZ-модели Гейзенберга на согласованность (*concurrence*) состояний соседних узлов. С усилением анизотропии максимальное значение согласованности в магнитном поле возрастает, превышая значение в отсутствие поля. Максимальная величина магнитного поля, допускающего запутанность, линейно связана с параметром анизотропии.

PACS: 03.65.Ud, 73.43.Nq, 75.10.Pq, 75.30.Gw

Как известно, квантовые состояния могут демонстрировать так называемую запутанность (*entanglement*), отвечающую особой нелокальной корреляции измеряемых величин и не имеющую классического аналога. При этом становится возможным определить состояние части квантовой системы, проведя измерение (возможно, даже разрушающее) другой части системы. Это явление лежит в основе квантовой обработки информации и необходимо для работы квантовых алгоритмов. Так называемая ЭПР-пара (Эйнштейна–Подольского–Розена)  $|\psi\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$  дает классический пример запутанного состояния [1].

В основе одной из рассматриваемых схем квантового компьютера лежат взаимодействующие спины электронов в твердотельных квантовых точках [2]. Спиновые системы обладают важным качеством – запутанность состояния легко регулируется изменением внешнего поля [3] или параметров системы [4] и может достигать значительной величины [5]. Влияние температуры, обычно вредное для разрабатываемых в настоящее время нанотехнологических приборов, в общем случае приводит к уменьшению запутанности. Однако при некоторых значениях внешнего поля возможен обратный вариант, при котором увеличение температуры повышает запутанность [6].

Поэтому, несмотря на сложности реализации, спиновые системы являются одними из наиболее перспективных для реализации квантовых вычислений. Помимо использования в квантовой информатике, исследования запутанности имеют и самостоятельное значение, так как, в частности, помогают глубже понять природу необратимости [7].

Простота спиновых моделей позволяет изучать запутанность в модели Изинга [8], XY-модели [5], изотропной и анизотропной моделях Гейзенберга [6, 9], в продольном [3] и поперечном [8] магнитном поле (*magnetic entanglement*) либо в его отсутствие [10], в основном состоянии [11] и с повышением температуры (*thermal entanglement*) [3, 6]. Найдены асимптотические значения согласованности для бесконечной антиферромагнитной цепочки и квадратной решетки [11].

Однако влияние анизотропии взаимодействия на запутанность в модели Гейзенберга до настоящего времени оставалось слабо изученным, хотя известны аналитические результаты для случаев 2 и 3 кубитов [6, 9]. В данной работе представлено исследование достаточно большой спиновой системы (до 16 спинов). Показаны общие закономерности и построена фазовая диаграмма.

Гамильтониан антиферромагнитной XXZ-цепочки записывается в виде

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^L (S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + \Delta S_i^z S_{i+1}^z) - H \sum_{i=1}^L S_i^z, \quad (1)$$

где  $\mathbf{S} = 1/2\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\sigma^{x,y,z}$  – матрицы Паули,  $\mathbf{S}_{L+1} = \mathbf{S}_1$ . Все величины измеряются в единицах обменной энергии  $J$ , анизотропия взаимодействия определяется параметром  $\Delta$ .

Известно несколько параметров, характеризующих запутанность изучаемой системы, – энтропия фон Неймана [12], запутанность формирования (*entanglement of formation*) и очищаемая запутанность (*distillable entanglement*), согласованность пары кубитов (*concurrence*) и подобие многокубитового состояния состоянию Гринбергера–Хорна–Цайлингера

<sup>1)</sup>e-mail: kashur@rol.ru

(fidelity) [13]. При изучении спиновых систем последние две меры используются наиболее часто.

В данной работе мы изучали запутанные состояния спиновых цепочек, рассчитывая согласованность соседних кубитов. Выражение для согласованности  $C$  двух кубитов, находящихся в запутанном состоянии с окружением, имеет вид [14]:

$$C = \max(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0), \quad (2)$$

где  $\lambda_i$  – упорядоченные по убыванию собственные значения матрицы  $R = \rho(\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho^*(\sigma^y \otimes \sigma^y)$ , являющейся произведением приведенной (reduced) матрицы плотности  $\rho$  этих двух кубитов и ее аналога после обращения времени,  $\sigma^y$  – матрица Паули. Величина  $C$  определяет запутанность формирования (entanglement of formation)  $E(C)$  [14]:

$$E(x) = -x \log_2(x) - (1-x) \log_2(1-x), \quad (3)$$

где  $x = (1 + \sqrt{1 - C^2})/2$ . В случае чистого состояния  $x$  представляет собой коэффициент соответствующего разложения Шмидта [12].

Для анизотропной ХХZ-цепочки Гейзенберга в отсутствие магнитного поля известны точные решения методом анзатца Бете [13] и квантового метода обратной задачи рассеяния [10]. В данной работе используется численный метод точной диагонализации (exact diagonalization) гамильтоновой матрицы. Определялись все энергетические уровни и собственные состояния спиновых цепочек, далее рассчитывалась полная матрица плотности  $\hat{\rho}$  и в соответствии с формулой (2) брался  $\text{Tr} \hat{\rho}$  по состояниям узлов  $i = 3, 4, \dots, L$ .

На рис.1 показаны результаты расчетов запутанности  $E$  для цепочки из 6 узлов при изменении внешнего поля и параметра анизотропии  $\Delta$ . Прежде всего следует отметить, что с увеличением  $\Delta$  возникает значительное отличие запутанности в поле от ее величины в отсутствие поля ( $E^0$ ). Более того, ее максимальная величина повышается по сравнению с изотропным случаем.

На рис.2 показана  $E^0$  для цепочек различной длины, с увеличением  $L$  стремящаяся к известному асимптотическому значению  $E_\infty^0 = E(C \simeq 0.386) \simeq 0.236$  (см. [11]). Максимум  $E^0$  наблюдается в изотропном случае. Влияние анизотропии приближенно описывается зависимостью  $C \simeq C_0 - C_1(\Delta - 1)^2$ , указанной в работе [10], с коэффициентами (для цепочки из 6 узлов)  $C_0 \simeq 0.386$ ,  $C_1 \simeq 0.047$ .

На рис.3 показано максимальное значение запутанности  $E_{\text{max}}$  как функции степени анизотропии. Фактически, эта величина выходит на насыщение при  $\Delta \geq 3.0$ .

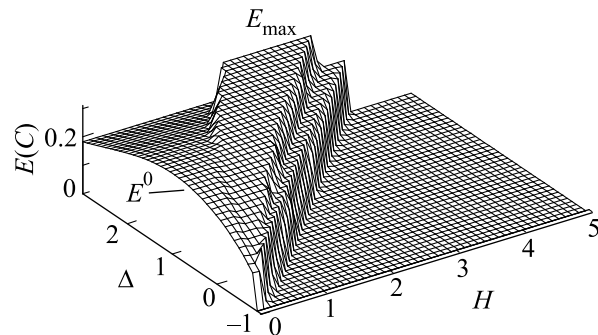


Рис.1. Запутанность  $E(C)$  состояний соседних спинов в цепочке из 6 узлов при  $T = 0$ , различном внешнем поле  $H$  и параметре анизотропии  $\Delta = -1.0 \dots 3.0$ . При  $\Delta < -1.0$  запутанность отсутствует. С усилением анизотропии увеличивается предельное значение поля, при котором состояния на соседних узлах согласованы ( $C \neq 0$ ), и увеличивается максимальное значение запутанности  $E_{\text{max}}$ ;  $E^0$  обозначено значение запутанности в отсутствие поля

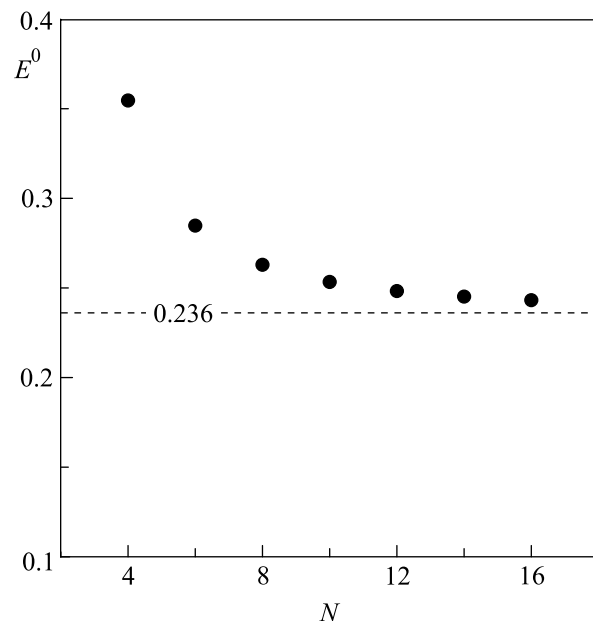


Рис.2. Запутанность  $E^0$  (при  $H = 0$ ) состояний соседних спинов в цепочке из 4...16 узлов,  $\Delta = 1.0$ ; стремление к асимптотическому значению 0.236 [11]

Заметим, что область величины магнитного поля, при которой существует ненулевая согласованность состояний соседних спинов, с усилением анизотропии расширяется, отражая общую связь перепутывания и взаимодействия.

Обоснуем это утверждение. Граница области ненулевой запутанности соответствует квантовому фазовому переходу, при котором все спины цепочки выстраиваются вдоль поля (спонтанная намагничен-

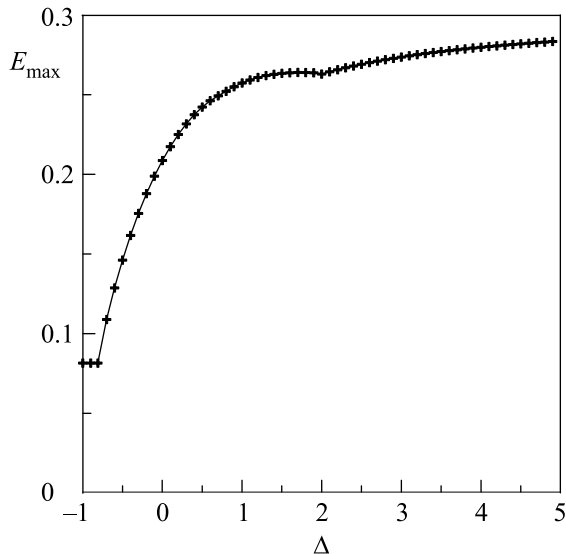


Рис.3. Максимально достижимая запутанность состояний соседних спинов  $E^{\max}$  в цепочке из 10 узлов в зависимости от параметра анизотропии

ность антиферромагнетика). Ближайшая к переходу ступень на графике запутанности (рис.5, см. ниже) соответствует семейству состояний вида  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(|01\dots 1\rangle + e^{i\phi}|10\dots 1\rangle + \dots + e^{i\phi(N-1)}|11\dots 0\rangle)$  с проекцией полного спина  $\sum_i S_i^z = N/2 - 1$ , где  $\phi$  – фазовый параметр. Соответствующее значение согласованности легко определить. Приведенная матрица плотности двух соседних спинов цепочки равна

$$\rho = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} N-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

и формула (2) дает согласованность  $C = 2/N$ .

Уровень с минимальной энергией в этом семействе соответствует  $\phi = \pi$ :

$$E_1^{\min} = -H \left( \frac{N}{2} - 1 \right) + \Delta \left( \frac{N}{4} - 1 \right) - 1. \quad (5)$$

При  $|H| > H^*$ , где

$$H^*/J = 1 + \Delta, \quad (6)$$

энергетически более выгодным становится состояние  $|111\dots 1\rangle$  и согласованность зануляется (см. рис.1 и 4).

Аналогичные формулы для квадратной ( $d = 2$ ) и кубической ( $d = 3$ ) решеток дают  $C = 2d/N$  и  $|H^*/J = d(1 + \Delta)$ .

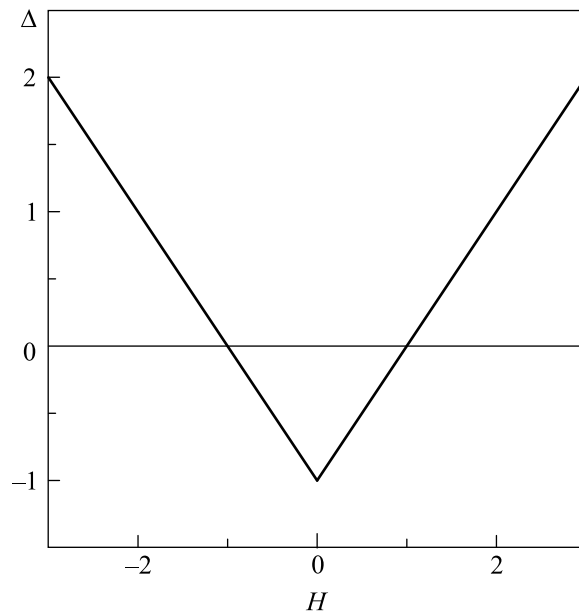


Рис.4. Фазовая диаграмма “магнитное поле – анизотропия”, описывающая область, где существует согласованность состояний соседних спинов:  $C > 0$  при  $|H| < 1 + \Delta$

При  $\Delta \rightarrow \infty$  модель (1) переходит в модель Изинга, основное состояние которой в отсутствие поперечного поля не запутано [8]. В свете этого проанализируем поведение согласованности для больших значений  $\Delta$ .

Прежде всего, с приближением к изинговскому пределу величина запутанности в существенной области значений приложенного поля действительно понижается. Ее можно оценить в простейшей теории возмущений по параметру  $1/\Delta$ . Так, рассмотрим изменение основного состояния с нулевой суммарной проекцией спина:

$$|\Psi\rangle \simeq a |\Psi_0\rangle + \sum_{i=1}^L b_i |\phi_i\rangle, \quad (7)$$

$$|\Psi_0\rangle = |01\dots 0_i 1_{i+1} \dots 01\rangle, \quad (8)$$

$$|\phi_i\rangle = |01\dots 1_i 0_{i+1} \dots 01\rangle \quad (9)$$

под действием оператора поперечного взаимодействия, который можно представить в виде

$$J/2 \sum_{i=1}^L (\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^-),$$

$$\sigma_i^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_i, \quad \sigma_i^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_i.$$

Ограничиваясь первым порядком теории возмущений, не будем учитывать состояния, получающиеся

из  $|\Psi_0\rangle$  более чем однократным действием возмущения. Тогда в усеченном базисе  $\{|\Psi_0\rangle, |\phi_i\rangle\}$  матрица гамильтониана примет вид

$$\hat{H} = J\Delta \begin{pmatrix} 0 & 1/2\Delta & 1/2\Delta & \dots & 1/2\Delta \\ 1/2\Delta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2\Delta & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Понижение основного уровня составляет  $-JL/4\Delta$ , а коэффициенты разложения волновой функции относятся как  $b_i/a = -1/2\Delta$ . В итоге согласованность соседних спинов цепочки приближенно равна  $1/\Delta$ .

Однако следует заметить, что представленное рассуждение несправедливо вблизи точки перехода ( $H \simeq \Delta$ ), где происходит пересечение энергетических уровней, соответствующих различным значениям проекции полного спина. При этом поперечную часть взаимодействия нельзя считать малой, и ситуация оказывается далека от модели Изинга. При таком поле величина согласованности остается значительной при любой силе анизотропии.

График согласованности, объединяющий эти две особенности, имеет существенно немонотонный вид, показанный на рис.5.

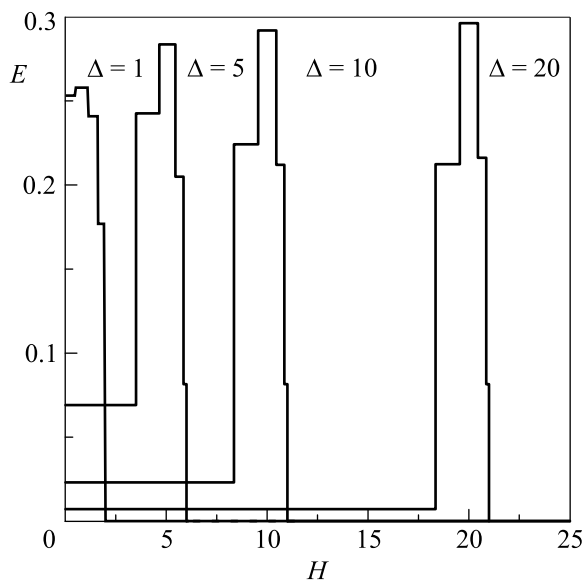


Рис.5. Запутанность формирования  $E(C)$  соседних спинов в цепочке из 10 узлов, в зависимости от внешнего поля  $H$ , при  $T = 0$ , при различной анизотропии  $\Delta = 1..20$ . С увеличением  $\Delta$  пик сдвигается вправо (более точно, одиночный пик “расщепляется” на два – для  $H < 0$  график выглядит симметрично), максимальное значение  $E(C)$  немного увеличивается

Расчеты для цепочек бóльшей длины ( $L = 14$ ) демонстрируют то же поведение. При этом с увеличением длины цепочки увеличивается количество ступеней, отвечающих различным значениям проекции полного спина, зависимость становится более плавной, но сохраняет те же особенности.

Влияние температуры на согласованность показано на рис.6. С возрастанием температуры график

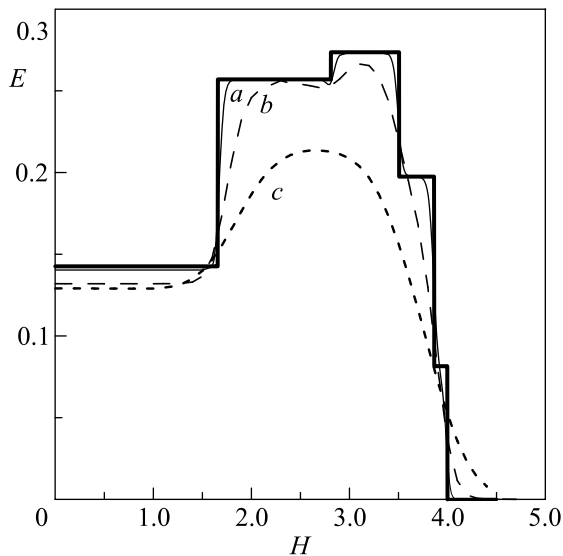


Рис.6. Влияние температуры на запутанность соседних спинов для цепочки из 10 узлов ( $\Delta = 3.0$ ):  $T = 0$  (жирная линия), 0.025 (a), 0.1 (b) и 0.25 (c)

запутанности “размывается” и несколько понижается. Наблюдается локальное падение запутанности при переходе между 2 и 3 ступенями, характеризующимися близкими значениями  $E(C)$  (сравни результат [3] для  $L = 6$ ,  $\Delta = 1.0$ ).

**Заключение.** В работе представлены новые данные о запутанности спиновой цепочки для случая анизотропной модели Гейзенберга. Учитывая, что реальные магнитные системы, как правило, имеют ось анизотропии, представленные данные могут быть полезны для разработки и изучения квантовых алгоритмов на основе спиновых систем, а фазовая диаграмма позволит прогнозировать рабочие параметры.

Наши расчеты показывают, что анизотропия взаимодействия существенно меняет согласованность состояний соседних спинов антиферромагнитной ХХZ-цепочки, а именно, увеличивая ее максимальное значение в присутствии поля и расширяя диапазон магнитного поля, допускающий ненулевую согласованность. Граничная величина поля связана с параметром анизотропии простым линейным соотношением (6).

Таким образом, имеющиеся данные по запутанности в разнообразных спиновых моделях позволяют выбирать наилучшие для запутанности внешние условия либо параметры системы. Одним из направлений дальнейших исследований в этой области можно ожидать изучение неоднородных спиновых систем с примесями (как в [4]), открытыми граничными условиями и неоднородным внешним полем, отвечающих реалистичным условиям создания квантовых точек.

Авторы выражают благодарность К. А. Валиеву, А. А. Кокину и А. А. Ларионову за полезные советы и обсуждения. Работа проведена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 03-02-16979.

- 
1. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935) [УФН **16**, 440 (1936)].
  2. S. Bandyopadhyay, B. Das, and A. E. Miller, Nanotechnology, **5**, 113 (1994).
  3. M. C. Arnesen, S. Bose, and V. Vedral, Phys. Rev. Lett. **87**, 017901 (2001).
  4. O. Osenda, Zhen Huang, and S. Kais, Phys. Rev. **A67**, 062321 (2003).
  5. A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, and R. Fazio, Nature **416**, 608 (2002); LANL E-print quant-ph/0202029v2 (2002).
  6. G. Rigolin, LANL E-print quant-ph/0311185v1.
  7. М. Б. Менский, *Квантовые измерения и декогеренция*, М.: Физматлит, 2001 [M. B. Mensky. *Quantum Measurements and Decoherence: Models and Phenomenology*. Kluwer Academic Publishers, 2000].
  8. D. Gunlycke, S. Bose, V. M. Kendon, and V. Vedral, Phys. Rev. **A64**, 042302 (2001) [LANL E-print quant-ph/0102137v2].
  9. X. Wang, H. Fu, A. I. Solomon, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 11307 (2001).
  10. Shi-Jan Gu, Hai-Qing Lin, and You-Quan Li, Phys. Rev. **A68**, 042330 (2003) [LANL E-print quant-ph/0407131v2].
  11. X. Wang and P. Zanardi, Phys. Lett. **A301** (1-2), 1 (2002) [LANL E-print quant-ph/0202108v1 (2002)]; V. Subrahmanyam, Phys. Rev. **A69**, 022311 (2004) [LANL E-print quant-ph/0309004v2 (2003)].
  12. К. А. Валиев, А. А. Кокин, *Квантовые компьютеры: надежды и реальность*, Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, стр. 42.
  13. X. Wang, Phys. Rev. **A66**, 044305 (2002) [LANL E-print quant-ph/0205049v3 (2002)].
  14. W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).