Письма в ЖЭТФ, том 29, вып. 7, стр. 392 – 395 *5 апреля 1979 г.*

О ФОРМЕ БЫСТРО ДВИЖУЩИХСЯ ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНЫХ КАПЕЛЬ

С.Г. Тиходеев

Показано, что вследствие взаимодействия с решеткой, движущаяся по полупроводнику электронно-дырочная капля должна неограниченно сплющиваться при приближении скорости движения к звуковой.

Электронно-дырочная капля (ЭДК) деформирует вокруг себя полупроводник. Это взаимодействие, описываемое в приближении деформационного потенциала, приводит к следующим эффектам: притяжению ЭДК к поверхности кристалла [1]; утяжелению движущейся ЭДК [2]; резкому включению торможения излучением при пересечении каплей звукового барьера [2, 3]. В [3] было показано также, что ЭДК при движении испытывает обратное воздействие со стороны решетки: при малых скоростях $V << S$ (S – скорость звука в полупроводнике) она должна слабо сплющиваться вдоль направления движения. Как будет показано ниже, капля должна неограниченно сплющиваться при приближении к звуковому барьеру.

Для простоты будем считать полупроводник изотропной средой. Пренебрежем также влиянием фононного ветра на форму капли (как показано в [4], это возможно, если радиус ЭДК не слишком велик, $R_0 \lesssim 10^{-4}$ см в Ge). В изотропном приближении ЭДК взаимодействует только с продольным полем $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$ (где $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – смещение атома в точке $(\mathbf{r}, t)$ от положения равновесия). Поэтому возьмем Лагранжиан решетки и ЭДК в виде

$$L = L_{\text{ЭДК}} + \int \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 - \frac{\rho S^2}{2} (\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2 - Dn\, \mathrm{div}\,\mathbf{u} \right] d^3 r, \qquad (1)$$

где $L_{\text{ЭДК}}$ – Лагранжиан свободной ЭДК, ρ – плотность кристалла, S – скорость продольного звука, D – константа деформационного потенциала, $n(\mathbf{r}, t)$ – плотность носителей в ЭДК.

Будем считать скорость ЭДК $\mathbf{V}$ заданной, а электронно-дырочную жидкость (ЭДЖ) в ней – несжимаемой с плотностью n_0. Последнее приближение применимо, когда взаимодействие ЭДК с решеткой мало по сравнению с энергией связи ЭДЖ (условие, хорошо выполняющееся в полупроводниках типа Ge). Тогда (1) – функционал производных деформационного поля и формы капли. Условие экстремальности действия для (1) даст уравнения для определения поля $\mathbf{u}$ и формы капли. Последнее, как несложно показать, выражает равенство на поверхности ЭДК внутреннего давления и давления сил поверхностного натяжения. Однако, это уравнение весьма сложно. Для получения качественной картины предположим, что капля имеет форму эллипсоида вращения (вокруг направления движения, в соответствии с аксиальной симметрией задачи) с объемом $\frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 b$, где R_0 – средний радиус ЭДК, a и b – полуоси образующего эллипса поперек и вдоль оси вращения. Вследствие постоянства объема этот класс поверхностей будет однопараметрическим (в качестве параметра удобно взять отношение полуосей $\nu = a/b$) с уравнением поверхности $|\mathbf{r}| = R_\nu(\theta)$, где θ – полярный угол относительно направления $\mathbf{V}$. Поэтому плотность n в (1) можно представить в виде

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0 \Theta(R_\nu(\theta) - |\mathbf{r} - \mathbf{V}t|), \qquad \text{где} \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Уравнение Лагранжа для $\mathbf{u}$ имеет вид:

$$\left(\Delta - \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{u} = -\frac{Dn_0}{\rho S^2}\vec{\nabla}\,\Theta(R_\nu(\theta) - |\mathbf{r} - \mathbf{V}t|). \tag{3}$$

Если подставить в (1) решение (3), действие для (1) станет функцией ν. Легко показать, что вследствие уравнения (3), задача на экстремум такого действия эквивалентна задаче на экстремум действия для (1) при независимых ν и $\mathbf{u}$. Прямое вычисление показывает, что такая задача в свою очередь эквивалентна задаче на отыскание минимума по ν суммы потенциальной энергии свободной ЭДК и половины энергии ее взаимодействия с решеткой. Если сила, вызывающая движение ЭДК, и трение о решетку однородны в пределах капли, то в установившемся режиме единственный член в потенциальной энергии, зависящий от формы, есть поверхностная энергия. Равновесное значение ν_0 определится, следовательно, из условия минимума величины

$$E = aS_{\text{ЭДК}} + \frac{Dn_0}{2}\int \Theta(R_\nu(\theta) - |\mathbf{r} - \mathbf{v}t|)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_\nu\, d^3r, \tag{4}$$

где a – коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{u}_\nu$ – решение (3) при данном ν, $S_{\text{ЭДК}}$ – площадь поверхности ЭДК.

Интеграл в (4) вычисляется, если совершить в (3) и (4) фурье-преобразование. Воспользуемся также известной формулой для площади поверхности эллипсоида вращения. Тогда

$$\frac{E}{2\pi R_0^2\,\alpha} = \nu^{2/3} + \nu^{-1/3}F_1(\nu) + \frac{\gamma}{3}\,\frac{\nu^2 - 1 - \beta^2\nu^2 F_2(\beta,\nu)}{\nu^2 - 1 - \beta^2\nu^2}, \tag{5}$$

где

$$F_1 = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-\nu^2}\Big/\sqrt{1-\nu^2} & 0 < \nu < 1, \\ \ln\dfrac{\nu + \sqrt{\nu^2 - 1}}{\nu - \sqrt{\nu^2 - 1}}\Big/2\sqrt{\nu^2 - 1}, & 1 < \nu, \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} \ln\dfrac{1 + \sqrt{(\beta^2 - 1)\nu^2 + 1}}{1 - \sqrt{(\beta^2 - 1)\nu^2 + 1}}\Big/2\sqrt{(\beta^2 - 1)\nu^2 - 1}, & 0 < \nu < \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \operatorname{arc\,tg}\sqrt{(1-\beta^2)\nu^2 - 1}\Big/\sqrt{(1-\beta^2)\nu^2 - 1}, & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} < \nu. \end{cases}$$

$\gamma = R_0/R_c$, $R_c = \alpha\rho s^2/(Dn_0)^2$. В Ge $R_c \cong 10^{-4}$ см.

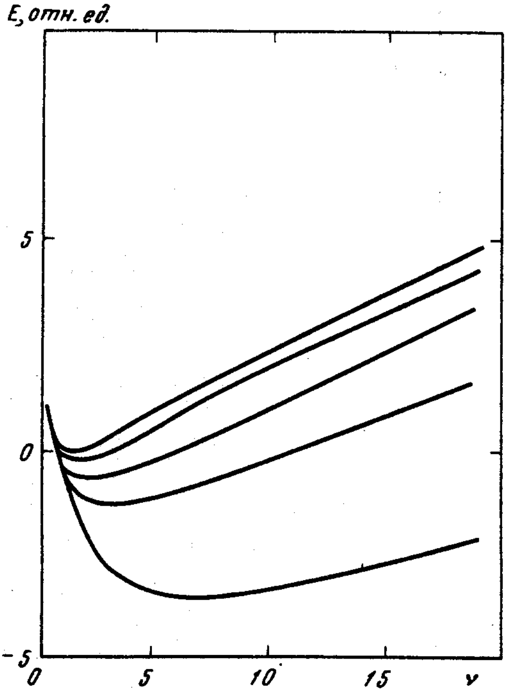

Рис. 1. Зависимость E от отношения полуосей ν капель радиуса $R_0 = 6R_c$ при различных скоростях движения (кривые сверху вниз: $\beta = 0{,}3$; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9)

На рис. 1 показано типичное поведение величины E как функции ν при различных скоростях капли. С ростом скорости положение минимума сдвигается в сторону увеличения ν. Результаты численного вычисления ν_0 как функции скорости для капель различных размеров представлены на рис. 2. Используя (5), можно получить асимптотику поведения ν_0 при $\beta \to 1$: $\nu_0 \cong (\frac{1}{4}\pi\gamma\beta^2)^{3/7}(1-\beta^2)^{-9/14}$. При приближении ЭДК к звуковому барьеру она должна неограниченно сплющиваться.

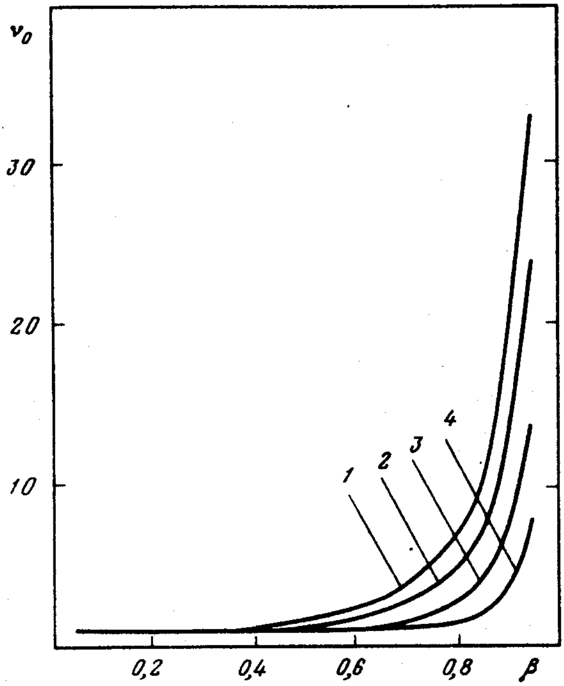

Рис. 2. Зависимость отношения полуосей ν_0 от скорости $\beta = V/S$ для капель различного среднего радиуса: $1 - R_0 = 3R_c$, $2 - R_0 = 6R_c$, $3 - R_0 = 9R_c$, $4 - R_0 = 12R_c$

Следует отметить, что при $\beta \to 1$ энергия $E \sim -(1-\beta^2)^{-1} \to -\infty$. Поэтому при больших скоростях движения $V \cong S$ нарушается условие применимости приближения несжимаемости. Выражение (2) также заведомо неприменимо тогда, когда толщина сплющенной ЭДК становится сравнимой с размытостью ее границ $\sim 10^{-6}$ см. И, наконец, в сплющенной ЭДК может развиться какая-либо неустойчивость (под влиянием, скажем, фононного ветра), что вызовет развал капли. Во всяком случае вопрос о том, может ли ЭДК достичь скорости звука, представляется весьма проблематичным в свете полученных результатов.

Автор благодарен Л.В.Келдышу за большую помощь в постановке и решении задачи.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 февраля 1979 г.

Литература

[1] G.Mahler, U.Schröder. Solid State Comm., 26, 787, 1978.

[2] М.И.Дьяконов, А.В.Субашиев. ЖЭТФ, 75, 1943, 1978.

[3] С.Г.Тиходеев. ДАН СССР, 245, №3, 1979.

[4] В.Л.Кононенко. ФТТ, 19, 3010, 1977.