Письма в ЖЭТФ, том 29, вып.9, стр. 596 – 598 *5 мая 1979 г.*

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИИ ДЛЯ ККГ

Я.А. Смородинский

Построена простая экспоненциальная функция, которая разлагается в ряд, коэффициентами которого служат ККГ. Разложение обнаруживает в явной форме все симметрии ККГ.

Коэффициенты Клебша – Гордона (ККГ) обычно рассматриваются как коэффициенты сложения в группе 0 (3), в представлении заданными угловыми моментами J, J_1, J_2. На самом деле ККГ имеет симметрию более высокую, связанную с группой перестановок трех моментов или с группой 0 (3) в трехмерном пространстве, координаты которого задают номера частиц. С этой группой связана нетривиальная симметрия КГГ, матричные элементы этой группы определяют рекурентные формулы для КГГ.

В рамках такой симметрии угловые моменты перестают быть заданными числами, и формулы обычной теории ККГ могут быть просуммированы по значениям моментов.

Хорошим примером такого рода может служить производящая формула дя КГГ, в которой явно видны все симметрии этих коэффициентов Формула представляет собой разложение экспоненты по неприводимым представлениям группы симметрии, которую можно рассматривать как простейший аналог разложения плоской волны по шаровым функциям.

Коэффициенты Клебша – Гордона для всех моментов и их проекций определяются производящей функцией

$$\exp(uv + \bar{x}\bar{y}) = \exp(1 + xy)(uv) =$$

$$= \Sigma(-1)^{J_1 + J_2 - J} \left[\frac{(J_1 + J_2 + J + 1)!}{(2J+1)(J_1 + J_2 - J)!}\right]^{1/2} <$$

$$< JM/J_1M_1J_2M_2 > U^{J_1}_{M_1} V^{J_2}_{M_2} X^{J}_{M} \bar{Y}^{-J}_{J_1 - J_2}. \qquad (1)$$

Сумма берется по всем J и M совместимым с ККГ. В этой формуле x, y, u, v двухкомпонентные спиноры со скалярным произведением

$$xy = x^1y^2 - x^2y^1 = x^1y_1 + x^2y_2. \qquad (2)$$

Прописными буквами обозначены мономы

$$A^J_M = \frac{(a_1)^{J-M}(a_2)^{J+M}}{[(J+M)!(J-M)!]^{1/2}} \qquad (3)$$

и аналогично для контравариантного монома.

Заметим, что

$$A^{JM} = (-1)^{J+M} A^{J}_{-M} \tag{4}$$

и скалярное произведение двух мономов определяется формулами

$$X^{J} Y^{J} = \sum_{M} X^{JM} Y_{JM}. \tag{5}$$

Компоненты спиноров с чертой суть спиноры

$$\begin{aligned} \bar{x}^{1} &= v_1 x^1 + v_2 x^2, \\ \bar{x}^{2} &= u_1 x^1 + u_2 x^2 \end{aligned} \tag{6}$$

при этом

$$(\bar{x}\bar{y}) = (xy)(vu). \tag{7}$$

Вывод формулы (1) основан на известном разложении [1]

$$\frac{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^{J_1 + J_2 - J}}{(J_1 + J_2 - J)!} \quad \frac{(v_1 x^1 + v_2 x^2)^{J-\mu} (u_1 \bar{x}^1 + u_2 x_2)^{J+\mu}}{[(J-\mu)!\,(J+\mu)!]} =$$

$$= \left[\frac{(J + J_1 + J_2 + 1)!}{(J + J_2 - J)!\,(2J+1)}\right]^{1/2} \sum_{M_1 M_2} \langle JM \mid J_1 M_1 J_2 M_2 \rangle\, U^{J_1}_{M_1} V^{J_2}_{M_2} \bar{X}^{JM} \tag{8}$$

$$(\mu = J_1 - J_2,\ M = M_1 + M_2).$$

Для получения формулы (1) заметим, что второй множитель слева есть моном

$$\bar{X}^{J\mu} = \frac{(\bar{x}^1)^{J-\mu}\ (\bar{x}^2)^{J+\mu}}{[(J-\mu)!\,(J+\mu)!]^{1/2}}. \tag{9}$$

Умножая (8) справа на моном $\bar{Y}^{J}_{\mu}$ и суммируя по μ и $J_1 + J_2 - J$ придем к экспоненте [1)].

Из формулы (1) можно получить все свойства симметрии ККГ, так как $M_1 + M_2$ и $J_1 - J_2$ входят в эту формулу как индексы проекций двух моментов. Из этой же формулы получается простое соотношение для d-функции. Для того чтобы его получить выберем следующие зна-

[1)] Этот моном связан с представлением второй группы с квантовыми числами J и $J_1 - J_2$. Именно здесь разность угловых моментов появляется в роли проекции.

чения для компонент спиноров u, v:

$$u = \begin{pmatrix} \sin\dfrac{\beta}{2} \\ \cos\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\beta}{2} \\ -\sin\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$uv = -1 .$$

Подставляя в (1) получим для правой части:

$$\Sigma(-1)^{J-J_1+M_2}\left[\frac{(J_1+J_2+J+1)!}{(J_1+J_2-J)!\,(2J+1)}\right]^{1/2} < JM | J_1 M_1 J_2 M_2 > \times$$

$$\times \frac{\left(\cos\dfrac{\beta}{2}\right)^{J_1+J_2+M_1-M_2}\left(\sin\dfrac{\beta}{2}\right)^{J_1+J_2-M_1+M_2}}{[(J_1-M_1)!\,(J_1+M_1)!\,(J_2-M_2)!\,(J_2+M_2)!]^{1/2}} . \qquad (11)$$

Сравнивая с формулой для d-функции [2, 3] получим вместо (11) выражение:

$$\Sigma \frac{(-1)^{J_1+J_2-J}}{(J_1+J_2-J)!} d^{J}_{M, J_1-J_2}(\beta)\, X^{JM}\, \bar{Y}^{J}_{J_1-J_2} . \qquad (12)$$

По параметру $J_1 + J_2 - J$ можно просуммировать в результате получим множитель $\exp(-1) = \exp(uv)$, который сократится с соответствующим множителем в правой части (1). Мы приходим к формуле:

$$\exp(xy) = \Sigma d^{J}_{M, J_1-J_2}(\beta)\, \bar{\underline{X}}^{JM}\, \bar{Y}^{J}_{J_1-J_2} \qquad (13)$$

или

$$\exp(xy) = \Sigma(-1)^{J+M} d^{J}_{MM'}(\beta)\, X^{J}_{-M}\, \bar{Y}^{J}_{M} . \qquad (14)$$

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
5 марта 1979 г.

Литература

[1] Н.Я.Виленкин. Специальные функции и представления групп, М.-Л., 1965 г., стр. 147.

[2] Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. Теория угловых моментов, Л., 1973.

[3] Я.А.Смородинский. ЖЭТФ, 75, 797, 1978.