Письма в ЖЭТФ, том 29, вып.10, стр. 641 – 644 *20 мая 1979 г.*

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В БЕЗМАССОВОЙ ТЕОРИИ ЯНГА – МИЛЛСА

Г.З.Басеян, С.Г. Матинян, Г.К.Саввиди

Найден и исследован новый класс решений уравнений Янга - Миллса, представляющих собой нелинейные массивные плоские волны.

1. В последнее время появился ряд указаний на то, что вакуум теории Янга – Миллса, рассматривающийся в теории возмущений, не является истинным [1 – 4]. По-видимому, истинный вакуум представляет собой когерентное состояние глюонного поля с бесцветными возбуждениями над ним.

В этой связи представляется крайне важным поиск и анализ классических решений уравнений Янга – Миллса без внешних источников в пространстве Минковского, которые могли бы оказаться полезными для построения и исследования структуры квантового вакуума и проблемы асимптотических состояний теории.

2. Рассмотрим поле Янга – Миллса без внешних источников, соответствующее для простоты группе $SU(2)$, в пространстве Минковского.

Уравнения движения имеют вид

$$\partial_\mu G^a_{\mu\nu} + g\epsilon^{abc} A^b_\mu G^c_{\mu\nu} = 0, \tag{1}$$

где

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

(латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, греческие – 0, 1, 2, 3). Будем искать решение уравнений (1) в системе координат, где вектор Пойнтинга обращается в нуль

$$T_{oj} = G^a_{oi} G^a_{ji} = 0, \tag{2}$$

$T_{\mu\nu} = -G^a_{\mu\lambda} G^{a\lambda}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G^a_{\lambda\rho} G^{a\lambda\rho}$ – тензор энергии – импульса поля. Совместное решение уравнений (1) и (2) удобно провести в калибровке: $A^a_o = 0$, $\partial_i A^a_i = 0$; тогда

$$\epsilon^{abc} A^b_i \dot{A}^c_i = 0, \tag{1а}$$

$$\ddot{A}_i - G^a_{ji,j} + g\epsilon^{abc} A^b_j G^c_{ji} = 0, \tag{1б}$$

$$\dot{A}^a_i G^a_{ij} = 0 \tag{2а}$$

(точка над A_i здесь означает дифференцирование по времени, $H_{ij,k} \equiv \partial_k G_{ij}$). Используя (1а), условие (2а) перепишем в виде

$$\dot{A}^a_i (A^a_{j,i} - A^a_{i,j}) = 0. \tag{2б}$$

Достаточным условием для выполнения соотношения (2б) являются

а) $A^a_{i,j} = 0$, б) $\dot{A}^a_i = 0$, в) $A^a_{i,j} - A^a_{j,i} = 0$.

Изучим случай а), когда в выбранной системе координат (см. (2)) потенциал зависит только от времени:

$$A^a_i = A^a_i(t).$$

Тогда уравнения (1б) примут вид

$$\ddot{A}_i^a - g^2 A_j^a A_j^b A_i^b + g^2 A_i^a A_j^b A_j^b = 0 \cdot \tag{3}$$

Общее решение системы уравнений (3) зависит, вообще говоря, от 18 постоянных интегрирования. Однако уравнения (1а) представляют собой условия равенства нулю трех из этих постоянных, так что решение $A_i^a(t)$ зависит от 15 постоянных интегрирования.

Решение системы (3) будем искать в девятипараметрическом виде:

$$A_i^a = \frac{O_i^a}{g} f^{(q)}(t), \tag{4}$$

где O_i^a – постоянная ортогональная матрица

$$O_i^a O_i^b = \delta^{ab} \tag{4'}$$

(в (4) нет суммирования по a).

Для $f^{(a)}(t)$ из (3) следует система

$$\ddot{f}^{(a)} + f^{(a)}(\mathbf{f}^2 - f^{(a)2}) = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{f}^2 \equiv \sum_{a=1}^{3} f^{(a)2}$.

Нас будет интересовать здесь частное решение уравнений (5), когда $f^{(1)} = f^{(2)} = f^{(3)} = f$, т.е. $f(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot{f}(t) + 2f^3(t) = 0$.

Решение этого уарвнения имеет вид

$$f(t) = \left(\frac{2g^2}{3}\right)^{1/4} \mu\, cn\left[\left(\frac{8g^2}{3}\right)^{1/4} \mu(t+t_0);\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \tag{6}$$

где $cn(x;k)$ – эллиптический косинус Якоби аргумента x и модуля k, t_0 – произвольное начало отсчета времени, μ^4 есть T_{00} в рассматриваемой системе координат. Построенное пятипараметрическое решение, даваемое формулами (4), (4′) и (6), периодично во времени с периодом $T = \left(\frac{3}{8g^2}\right)^{1/4} \frac{4}{\mu} K(1/\sqrt{2})$, где $K(x)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Напряженности полей, соответствующие этому решению, имеют вид

$$E_i^a = \frac{O_i^a}{g} \dot{f}, \tag{7}$$

$$H_i^a = \epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}\ \frac{O_j^b\ O_k^c}{2g} f^2. \tag{8}$$

Из (7) и (8) видно, что

$$H_i^a = g\,(f/\dot{f}\,)^2\,\epsilon_{ijk}\,\epsilon^{abc}\,E_j^b\,E_k^c\,. \tag{9}$$

Из (7) и(4′) видно, что матрица O_i^a является поляризационной матрицей напряженностей полей; три вектора $\mathbf{E}^a$ взаимно ортогональны в нашей системе координат, а из (9) следует, что вектора $\mathbf{H}^a$, параллельны векторам $\mathbf{E}^a$.

3. Нетрудно видеть, что аргумент найденного выше периодического решения (6) при преобразовании Лоренца $x_\mu = a_\mu^\nu\,(\mathrm{v})\,x'_\nu$ переходит в $kx = k_\mu x_\mu$, где $k_0 = \mu\gamma$, $k_i = \mu v_i\,\gamma$, ($\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$), т.е. $k^2 = \mu^2$, так что μ играет роль массы, и мы имеем дело с массивной нелинейной плоской волной.

При этом для потенциала $A_\mu^a\,(x)$ получаем:

$$A_\mu^a\,(kx) = a_\mu^\nu\,(\mathrm{v})\,\frac{O_\nu^a}{g} f\,(k\,(x + x_0)\,)\,, \quad O_0^a = 0\,. \tag{10}$$

Аналогично можно преобразовать поля E_i^a и H_i^a (7) и (8). Найденные решения отличаются от соответствующих решений Коулмена [5] тем, что величина вектора Пойнтинга у нас не равна плотности энергии ($k^2 = \mu^2$). Отказ от этого условия и привел к возникновению (уже на классическом уровне) массы μ в нелинейной плоской волне (10).

В заключение мы бы хотели отметить, что полученный в работе объект – нелинейная плоская волна с возникшей из-за нелинейности массой может оказаться полезным при квантовании нелинейной теории.

Авторы благодарны О.В.Канчели и Р.М.Мкртчяну за интересные обсуждения.

Поступила в редакцию
18 марта 1979 г.

Литература

[1] A.M.Polyakov. Phys. Lett., **59B**, 82, 1975; A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S. Schwarz, Yu.S.Tyupkin. Phys. Lett., **59B**, 85, 1975.

[2] В.Н.Грибов. Материалы XII зимней школы ЛИЯФ, 1977, стр.147.

[3] S.G.Matinyan, G.K.Savvidy. Nucl. Phys., **B134**, 539, 1978; G.K.Savvidy. Phys. Lett., **71B**, 133, 1977; И.А.Баталин, С.Г. Матинян, Г.К. Саввиди. ЯФ, **26**, 407, 1977.

[4] C.G. Callan, R.Dashen, D.J.Gross. Phys. Rev., **D17**, 2717, 1978.

[5] S.Coleman. Phys.Lett., **70B**, 59, 1977.