

## Взаимодействие заряда с плоской волной в среде

В. В. Терновский<sup>1)</sup>, А. М. Хапаев

Физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 июня 2003 г.

После переработки 24 июля 2003 г.

Рассмотрена задача моделирования энергетического состояния релятивистского заряда в поле плоской циркулярно поляризованной волны и продольного магнитного поля в среде с показателем преломления  $k \neq 1$ . Классическое описание взаимодействия сводится к интегрированию уравнения Максвелла–Лорентца. Наличие среды приводит к качественным изменениям в динамике заряда. Получено точное аналитическое представление энергии ансамбля релятивистских зарядов как функции средней пролетной координаты  $\bar{z}$  при  $k = 1$  и асимптотическое выражение для  $k \neq 1$  в первом приближении по  $\mu = 1 - 1/k^2$ . Построение приближения проводится методом Ван-Дер-Поля.

PACS: 03.50.De

Релятивистское движение заряженных частиц в электромагнитных полях в течение многих лет вызывало интерес как с физической, так и с математической точек зрения [1, 2]. Классическое описание движения заряда сводится к интегрированию уравнения

$$m_0 \ddot{x}_\mu = \frac{e}{c} \dot{x}_\nu H_{\mu\nu}. \quad (1)$$

В настоящей работе построено аналитическое представление решения (1) в виде ряда Фурье в системе магнитное поле и плоская циркулярно поляризованная волна с показателем преломления среды  $k$ , слабо уклоняющимся от единицы. Известные до сих пор решения были найдены для  $k = 1$  [3], либо в частных, резонансных случаях [4]. Цель работы состоит в поиске всех возможных решений (1) в зависимости от лабораторного времени  $t$  и пролетной координаты  $z$ . Задача рассматривается в приближении заданного поля, при этом учитывается магнитное поле волны.

**Постановка задачи.** Уравнение движения заряда (1) решается в области  $z > 0$  при произвольных начальных данных

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= c\beta_{x0}\gamma_0, & \dot{y}_0 &= c\beta_{y0}\gamma_0, \\ \dot{z}_0 &= c\beta_{z0}\gamma_0, & \gamma_0 &= 1/(1 - \beta_0^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где точка над буквой – производная по собственному времени  $\tau$ ,  $\beta_0 = (\beta_{x0}, \beta_{y0}, \beta_{z0})$  – начальная скорость частицы. Поле волны и аксиальное магнитное поле задаются выражениями

$$\mathbf{A} = -\frac{cE_0}{\omega} [\sin(\omega\xi + \psi_0)\mathbf{i} - g \cos(\omega\xi + \psi_0)\mathbf{j}],$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}'(\xi), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0\mathbf{k} - \frac{1}{\beta_f c}\mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \xi = t - \frac{z}{\beta_f c},$$

где  $H_0$  – амплитуда постоянного магнитного поля (произвольного знака),  $g = \pm 1$  – поляризация волны,  $\omega$  – частота,  $E_0$  и  $\psi_0$  – амплитуда и начальная фаза волны,  $\beta_f$  – фазовая скорость ( $\beta_f = 1/k$ , где  $k$  – показатель преломления среды). В дальнейшем под  $z$ ,  $t$ ,  $\varepsilon$ ,  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{y}_0$ ,  $\dot{z}_0$  и  $\tau$  будем понимать безразмерные переменные

$$\frac{\omega z}{c}, \quad \omega t, \quad \varepsilon = \frac{eE_0}{m\omega c}, \quad \frac{c_x}{c}, \quad \frac{c_y}{c}, \quad \frac{\dot{x}_0}{c}, \quad \frac{\dot{y}_0}{c}, \quad \frac{\dot{z}_0}{c} \quad \text{и} \quad \omega\tau.$$

Практический интерес представляют решения в зависимости от  $z$  и  $t$  относительно неподвижного наблюдателя. Используется дифференциальная формула перехода

$$\frac{d}{dz} = \frac{\beta_f}{\gamma(\tau) - \alpha} \frac{d}{d\tau},$$

где  $\alpha = \gamma(1 - \beta_z\beta_f) = \text{const}$  – интеграл энергии-импульса.

Таким образом, задача Коши для (1) сводится к интегрированию уравнения колебательного типа с начальными условиями (2):

$$(\gamma - \alpha)^2 \frac{d^2\gamma}{dz^2} + (\gamma - \alpha) \left( \frac{d\gamma}{dz} \right)^2 + P_3(\gamma, \mu) = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} P_3(\gamma, \mu) &= \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{1 - \mu} \gamma^3 + \frac{3}{2} \mu \delta \gamma^2 + \frac{1}{2} (2\delta^2(1 - \mu) + \mu s) \gamma + \\ &+ (1 - \mu) \left( \frac{1}{2} \delta s - g \frac{\omega_0}{\omega} \varepsilon^2 \right), \\ \mu &= 1 - \beta_f^2, \quad \delta = g \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\alpha}{1 - \mu}, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> e-mail: vladimir1961@hotmail.com

$$s = 1 + \varepsilon^2 + c_x^2 + c_y^2 + \frac{\alpha^2}{1 - \mu} - 2g \frac{\omega_0}{\omega} \gamma_0,$$

$$c_x = \dot{x}_0 + \varepsilon \sin \psi_0 + \frac{\omega_0 y_0}{c}, \quad c_y = \dot{y}_0 - g\varepsilon \cos \psi_0 - \frac{\omega_0 x_0}{c}.$$

Многозначность энергии  $m_0 c^2 \gamma$  как функции  $z$ . Многозначность функции энергии или релятивистского множителя  $\gamma$  от  $z$  означает, что найдутся такие  $\beta_{x0}, \beta_{y0}, \beta_{z0}, \varepsilon, \omega_0/\omega, \beta_f, \psi_0$ , что некоторым точкам на оси  $z$  будут соответствовать несколько значений  $\gamma$  в разные моменты времени. Это приводит к возможности построения аналитического и численного решения  $\gamma$  от  $z$  только на участках однозначной зависимости. Иными словами, заряд, попадающий в область действия поля циркулярно поляризованной волны и постоянного магнитного поля, может быть остановлен в  $z$ -направлении, а при  $\beta_f = 1$  захвачен ею и совершать движение по тороидальной поверхности [5]. Многообразие входных параметров находится из условия  $\dot{z} = 0$  и соотношения  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = c^2(\gamma^2 - 1)$ :

$$2g\gamma_0\beta_{z0}\beta_f \frac{\omega_0}{\omega} = (c_x)^2 + (c_y)^2 - (\varepsilon + \sqrt{\alpha^2 - 1})^2. \quad (4)$$

Многообразие (4) определяет поверхность в пространстве входных данных, разделяющую область однозначного и многозначного решений.

**Фазовый портрет уравнения (1).** Для построения аналитической зависимости  $\gamma$  от  $z$  выясним влияние среды или параметра  $\mu$  на фазовый портрет уравнения (1). В работе [6] была показана эквивалентность (1) уравнению

$$\dot{\gamma}^2 + P_4(\gamma, \mu) = 0, \quad (5)$$

где  $P_4(\gamma, \mu)$  – полином четвертой степени по  $\gamma$ . На рис.1 представлен трехмерный фазовый портрет (5) при фиксированных  $\beta_{x0}, \beta_{y0}, \beta_{z0}, \varepsilon, \omega_0/\omega, \psi_0, g = +1$ . Видно, что при  $\mu \approx 0$  наблюдается резкий всплеск амплитуды колебаний  $\gamma$ . Это означает, что при взаимодействии заряженных частиц с электромагнитной волной можно подобрать среду с такими свойствами, при которых частица будет набирать энергию. В противоположность этому условие циклотронного резонанса  $\delta = 0$  трудно обеспечить на практике [7], так как любое малое возмущение начальных данных приводит к возникновению периодического решения.

Если поляризация волны  $g = -1$ , то фазовый портрет на рис.2 отличается от предыдущего случая. При  $\mu > 0$  существует область параметра  $\mu$ , в которой частица слабо взаимодействует с волной, несмотря на сильную начальную закрутку.

При построении фазовых поверхностей достаточно решить алгебраически уравнение (5) относительно

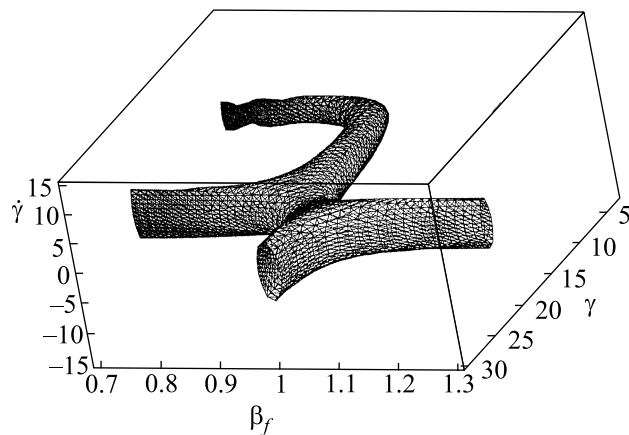


Рис.1. Фазовый портрет уравнения (5). Входные параметры:  $\beta_{x0} = 0.2, \beta_{y0} = 0.2, \beta_{z0} = 0.958, \varepsilon = 0.66, \omega_0/\omega = 0.84, \psi_0 = 1.5$

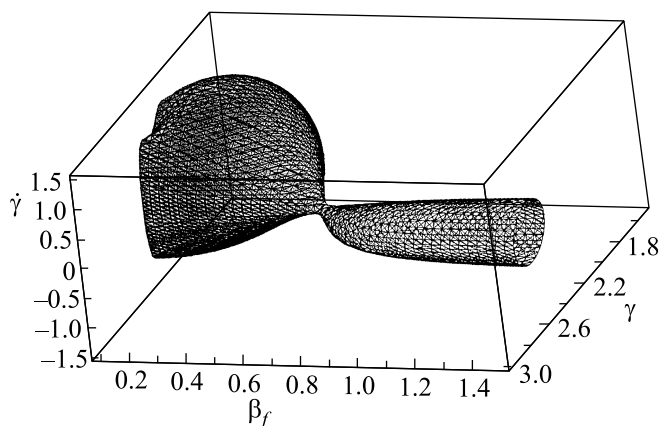


Рис.2. Фазовый портрет уравнения (5). Входные параметры:  $\beta_{x0} = 0.1, \beta_{y0} = 0.1, \beta_{z0} = 0.9, \varepsilon = 0.8, \omega_0/\omega = 1.9, \psi_0 = 0.5, g = -1$

$\dot{\gamma}, \gamma$  или  $\mu$ . Фазовый портрет позволяет судить об амплитуде и значениях энергии при изменении свойств среды, не решая дифференциальное уравнение.

**Равновесные орбиты и бифуркационные значения показателя преломления.** Уравнение (5) описывает колебания консервативной системы и может быть исследовано в рамках теории бифуркаций [8]. Наша цель – найти такое соотношение между входными параметрами, когда энергия, возможно, достигает максимума.

Равновесные орбиты определяются из кубического уравнения

$$F(\gamma, \mu) = \left( \frac{\mu\gamma}{1 - \mu} + \delta \right)^3 + \left( \frac{\mu}{1 - \mu} s - \delta^2 \right) \left( \frac{\mu\gamma}{1 - \mu} + \delta \right) - 2g \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{\omega_0}{\omega} \varepsilon^2 = 0.$$

Для нахождения корней удобно воспользоваться тригонометрической формой. При этом число действительных корней определяется знаками дискриминанта

$$D = \frac{1}{27} \left( \frac{\mu}{1-\mu} s - \delta \right)^3 + \frac{\mu^2}{(1-\mu)^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \varepsilon^4$$

и величины  $\mu s - \delta^2$ . Если  $D \leq 0$  и  $\mu s - \delta^2 < 0$ , то имеем три действительных корня, если  $D > 0$  и  $\mu s - \delta^2 < 0$ , то один действительный корень. Если  $\mu s - \delta^2 > 0$ , то единственный действительный регулярный устойчивый корень находится из соотношения

$$\frac{\mu}{1-\mu} \gamma^* + \delta = -2R \operatorname{sh} \frac{\vartheta}{3},$$

$$\operatorname{sh} \vartheta = 3^{3/2} \left| \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\omega_0}{\omega} \varepsilon^2 \right| \left| \frac{\mu}{1-\mu} s - \delta^2 \right|^{2/3}, \quad (6)$$

$$R = \operatorname{sign} \left( -2 \frac{\mu}{1-\mu} g \right) \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\left| \frac{\mu}{1-\mu} s - \delta^2 \right|}.$$

Ясно, что часть корней сингулярна при  $\mu \rightarrow 0$ .

Согласно [8], точки бифуркации определяются из общего решения системы уравнений:

$$\begin{cases} F(\gamma, \mu) = 0 \\ F'_\gamma(\gamma, \mu) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left( \delta^2 - \frac{\mu}{1-\mu} s \right)^{3/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} 6 \frac{\mu}{1-\mu} g \frac{\omega_0}{\omega} \varepsilon^2. \quad (7)$$

Так как  $\delta, s$  зависят от  $\mu$ , то задача (7) поиска бифуркационного значения показателя преломления  $k = 1/\beta_f$  решается численно. Например, при  $\beta_{x0} = 0.2$ ,  $\beta_{y0} = 0.2$ ,  $\beta_{z0} = 0.958$ ,  $\varepsilon = 0.66$ ,  $\omega_0/\omega = 0.84$ ,  $\psi_0 = 1.5$ , уравнение (7) допускает две точки бифуркации  $k_{1,2} = 1.000017598, 1.054951067$ . В точке  $k_1$  амплитуда колебаний энергии в 150 раз превышает начальное значение  $\gamma_0 = 21.14774672$ . На рис.3 изображены зависимости энергии  $\gamma$  от собственного времени  $\tau$  при разных значениях  $\beta_f$ .

**Метод решения.** Уравнение (3) описывает колебания консервативной системы. Точное аналитическое решение неизвестно, поэтому построим приближенное решение методом усреднения Ван-Дер-Поля [9], предполагая малость параметра  $\mu$ . Предположим также, что существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что в окрестности  $-\varepsilon < \mu < \varepsilon$  отсутствуют точки бифуркации. Точнее, будем раскладывать  $\gamma$  в асимптотический ряд в окрестности регулярного корня (6). Ограничиваясь рамками первого приближения, выписываем периодическое решение уравнения (3):

$$\gamma(z) = \gamma^* + \frac{1}{2} \frac{(1 + \frac{1}{2}\mu)}{a} b^2 +$$

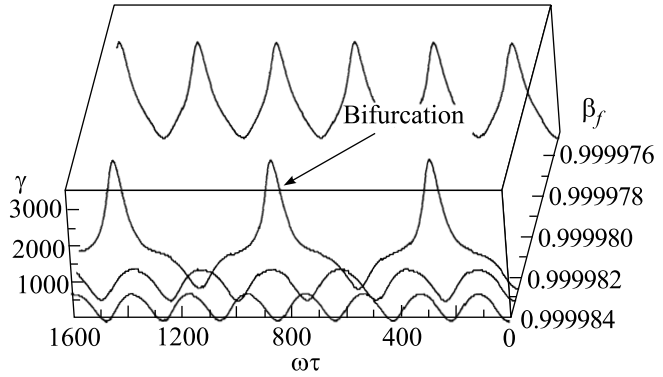


Рис.3. Энергия частицы в зависимости от времени  $\omega\tau$  и от параметра  $\beta_f$

$$+ 2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J'_n \left( -\frac{n(1 + \frac{1}{2}\mu)}{a} b \right) \times \cos \left\{ n \left[ \frac{\Omega}{a} z - \frac{(1 + \frac{1}{2}\mu)}{a} \frac{\dot{\gamma}_0}{\Omega} - \theta_0 \right] \right\}, \quad (8)$$

где

$$a = (1 + \frac{1}{2}\mu) \gamma^* - \alpha_0 - \frac{1}{2} \mu \gamma_0, \quad b = \sqrt{(\gamma_0 - \gamma^*)^2 + \frac{\dot{\gamma}_0^2}{\Omega^2}},$$

$$\Omega = \delta_0 + \frac{\mu}{2\delta_0} d, \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\dot{\gamma}_0}{(\gamma_0 - \gamma^*) \Omega},$$

$$d = \delta_0^2 \gamma_0 (\beta_{z0} - 2) - \delta_0 s_0 + 3g \frac{\omega}{\omega_0} \varepsilon^2,$$

$$\gamma^* = -\frac{1}{2} \frac{s_0}{\delta_0} + \frac{1}{\delta_0} g \frac{\omega_0}{\omega} \varepsilon^2 + \frac{\mu}{3\delta_0^2} \times$$

$$\times \left\{ \left[ \frac{1}{2} \delta_0^2 \gamma_0^2 (1 - \beta_{z0} + \beta_{z0}^2) + \frac{1}{4} s_0 \delta_0 \gamma_0 (2 - \beta_{z0}) + \frac{s_0^2}{8} \right] - \frac{1}{2} d^2 \right\},$$

$\alpha_0, s_0$  и  $\delta_0$  – введенные ранее коэффициенты  $\alpha, s$  и  $\delta$  при  $\mu = 0$ ,  $J_n$  – функции Бесселя целого порядка. Период колебаний по  $z$  с точностью до  $\mu$  вычисляется по формуле

$$T_z = \frac{2\pi(\gamma^* - \alpha_0)}{\delta_0} + \mu \frac{\pi}{\delta_0} \left( \gamma^* - \gamma_0 - 2(\gamma^* - \alpha_0) \frac{d}{2\delta_0^3} \right).$$

При построении решения в виде ряда Фурье использовалось известное соотношение: если  $\nu = \eta - \sigma \sin \eta$ , то

$$\cos \eta = -\frac{1}{2} \delta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J'_n(n\sigma) \cos n\nu.$$

Заметим, что представление (8) несправедливо в точках всплеска(бифуркации) и многозначности  $\gamma$ . Выбор  $\mu$  определяется фазовыми поверхностями уравнения (5), близкими к цилиндрической форме, рис.2.

Аналогично строится решение в зависимости от лабораторного времени  $t$ :

$$\gamma(t) = \gamma^* + \frac{1}{2\gamma^*} b^2 + 2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J'_n \left( -\frac{n}{\gamma^*} b \right) \times \\ \times \cos \left\{ n \left[ \frac{\Omega}{\gamma^*} t - \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma^* \Omega} - \theta_0 \right] \right\}.$$

Ансамбль зарядов при  $\mu = 0$ . Полученное решение (8) описывает зависимость энергии одного заряда как функции  $z$ . Для описания энергии ансамбля невзаимодействующих релятивистских зарядов используется модель “электронного кольца”:

$$x_0 = R_0 \cos \varphi, \quad y_0 = R_0 \sin \varphi,$$

$$\beta_{x0} = \beta_{\perp 0} \sin \varphi, \quad \beta_{y0} = -\beta_{\perp 0} \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Задача сводится к поиску зависимости  $\bar{\gamma}$  от  $\bar{z}$ , где

$$\bar{\gamma}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\tau, \varphi) d\varphi, \quad \bar{z}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(\tau, \varphi) d\varphi.$$

Получим необходимые решения из уравнения (3) при  $\mu = 0$ :

$$\bar{\gamma}(\bar{z}) = \bar{q} - \frac{1}{2} \frac{(\gamma_0 - \bar{q})^2}{(\alpha_0 - \bar{q})} + \\ + 2(\gamma_0 - \bar{q}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J'_n \left( n \frac{(\gamma_0 - \bar{q})}{(\alpha_0 - \bar{q})} \right) \cos \left( n \frac{\delta_0}{(\alpha_0 - \bar{q})} \bar{z} \right), \quad (9)$$

$$\bar{q} = g\varepsilon^2 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\delta_0^2} - \frac{1}{2\delta_0} \times \\ \times \left( 1 + \alpha_0^2 + 2\varepsilon^2 + \left( \beta_{\perp 0} \gamma_0 + \frac{\omega_0 R_0}{c} \right)^2 - 2g\gamma_0 \frac{\omega_0}{\omega} \right),$$

период колебаний ансамбля  $\bar{T}_{\bar{z}} = 2(\bar{q} - \alpha_0)\pi/\delta_0$ . Аналогично (9) выводится решение при  $\mu \neq 0$ , которое не приводим из-за ограниченности объема статьи.

Проведенный анализ обнаруживает сложное поведение релятивистского заряда в конфигурации вол-

на и магнитное поле. Заряд может значительно набирать энергию в среде со свойствами, близкими к вакууму. Явление всплеска(бифуркации) значений энергии при изменении показателя преломления среды связано с вхождением параметра  $\mu$  при старших степенях полинома  $P_3(\gamma, \mu)$ . Действительно, эффект исчезает при  $\mu = 0$ .

Представление решения в виде ряда Фурье (8) и (9) позволяет ограничиться несколькими членами ряда в силу экспоненциального убывания коэффициентов. Для построения второго приближения используется вышеупомянутый метод усреднения, который приводит к появлению высших гармоник с громоздкими коэффициентами. Отметим, что формула (8) точна для  $\mu = 0$ .

Многозначность функции энергии  $\gamma$  от  $z$  ограничивает применение численных методов решения для уравнения (1). Развитый в статье метод допускает обобщение на случай неоднородных периодических ведущих магнитных полей.

В заключение авторы выражают благодарность Б. С. Лукьянчуку за обсуждение работы и ценные замечания.

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М.: Наука 1973.
2. А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, М.: Наука, 1981.
3. Б. А. Володин, И. В. Пономарев, А. М. Хапаев, *Изв. вузов, физика* **3**, 113 (1984).
4. A. Bourdier and S. Gond, *Phys. Rev.* **E62**, 4189 (2000).
5. В. В. Терновский, А. М. Хапаев, *Фундам. и прикл. математика* **8**, 547 (2002).
6. Б. А. Володин, В. Р. Халилов, А. М. Хапаев, *Изв. вузов, физика* **2**, 97 (1981).
7. В. П. Милантьев, Я. Н. Шаар, *ЖТФ* **70**, 100 (2000).
8. А. А. Адронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, М.: Физматгиз, 1959.
9. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М.: Фитматгиз, 1963.