Письма в ЖЭТФ, том 33, вып.7, стр. 380 – 384 *5 апреля 1981 г.*

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ НА НЕФИЗИЧЕСКИЙ ЛИСТ ЭНЕРГИИ

Ю.В.Орлов

На примере уравнения Липпмана – Швингера дан простой рецепт аналитического продолжения интегральных уравнений с ядром Коши на нефизический лист энергии E ($\mathrm{Im}\sqrt{E} < 0$). Результат работы позволяет находить виртуальные и резонансные полюса S-матрицы, а также вершинные функции распада (синтеза) соответствующих состояний, используя обычные методы расчета связанных состояний.

Одной из важных проблем теории рассеяния и ядерных реакций является расчет резонансных и виртуальных (антисвязанных) состояний, соответствующих полюсам S-матрицы на нефизическом листе римановой поверхности энергии E (l_-, $\mathrm{Im}\sqrt{E} < 0$). В последние годы интерес к этой проблеме сильно возрос в связи со значительным расширением круга физических задач, в которых резонансы являются главным объектом исследования. Достаточно указать на изучение дибарионных резонансов [1 – 3], резонансов в системах $N\Delta$ [4 – 6], $N\bar{N}$ [7 – 8] и $2N\bar{N}$ [9, 10], а также сохраняющих свою актуальность резонансов в ядерных реакциях [11]. К сожалению, существующие методы нахождения полюсов S-матрицы в l_- громоздки в вычислительном отношении и, как правило, не гарантируют правильности результатов. Последнее связано с необходимостью аналитического продолжения в l_- различных физических величин, заданных численно в некотором числе точек физического листа E (l_+, $\mathrm{Im}\sqrt{E} > 0$). Например, метод аналитического продолжения по константе связи λ, имеющий, по-видимому, преимущества по сравнению с другими приближенными методами [11], плохо применим к нахождению виртуальных состояний и резонансов, далеких от порога. Для его реализации необходимо сначала рассчитать энергии связанных состояний в большом числе точек по λ. Во вблизипороговой области обычно используют разложение теории эффективного радиуса [12]. Близкие к физической области резонансы, находят вычисляя траектории Редже [13]. Известно алгебраическое соотношение между значениями t-матрицы на верхнем (t_+) и нижнем (t_-) берегах правого разреза [14], которое можно получить из уравнения Лоу и унитарности S-матрицы. Однако, для нахождения полюсов S-матрицы с помощью аналитического продолжения этого соотношения надо знать t-матрицу на энергетической поверхности во всей области E в l_+, соответствующей области E в l_-, где ищется полюс.

В настоящей работе предложен наиболее прямой метод нахождения полюсов S-матрицы в l_-, состоящий в строгом аналитическом продолжении самих интегральных уравнений теории рассеяния, в результате чего задача становится вполне аналогичной расчету энергий связанных состояний. Проиллюстрируем этот метод на примере уравнения

Липпмана – Швингера (ЛШ) для t-матрицы вне энергетической поверхности с потенциалом $V(r)$, которое записывается в форме (z в I_+)

$$t_l(q\ q',z) = V_l(q,q') + 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{V_l(q,k)t_l(k,q',z)}{z - k^2/2\mu} k^2\,dk, \qquad (1)$$

где

$$V_l(q,q') = (2\pi^2)^{-1} \int\limits_0^\infty j_l(qr)\,V(r)\,j_l(q'r)\,r^2\,dr, \qquad (2)$$

$j_l(x)$ – сферическая функция Бесселя, μ – приведенная масса, q и q' – начальный и конечный импульсы, l (орбитальный момент, который ниже будет опущен для краткости записи. Для действительных z-E имеем

$$t_\pm(q,q',E) = V(q,q') + 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{V(q,k)t_\pm(k,q',E)}{E - k^2/2\mu \pm i\epsilon}\,k^2\,dk, \quad (\epsilon \to 0+) \qquad (3)$$

где t_+ и t_- – значения t-матрицы на верхнем и нижнем берегах правого разреза в комплексной E-плоскости. Чтобы найти вид уравнения ЛШ в I_-, надо аналитически продолжить интегральное слагаемое в (1). Воспользуемся для этого известным способом нахождения регулярной ветви функции, выражаемой интегралом типа Коши, которая возникает из исходной ветви этой многозначной функции при обходе точки ветвления (конца интегрирования) по замкнутому контуру [15]. Вид контура интегрирования не имеет значения. Для нашей задачи запишем главную ветвь в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \frac{\phi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \text{ в } I_+ \qquad (4)$$

где ϕ удовлетворяет условию Гельдера везде на линии интегрирования. Тогда с помощью хорошо известных формул Сохоцкого

$$\frac{1}{\zeta - z \mp i\epsilon} = \frac{P}{\zeta - z} \pm i\pi\delta(\zeta - z), \quad \epsilon \to 0+, \qquad (5)$$

где P обозначает главное значение интеграла по Коши, получаем, что аналитическим продолжением $\Phi(z)$ из области I_+ в область I_- будет функция

$$\Phi_-(z) = \Phi(z) - \phi(z). \qquad (6)$$

Очевидно, что аналитическое продолжение с помощью (6) имеет место для области z, в которой функция ϕ голоморфна. Чтобы воспользоваться формулой (6) для аналитического продолжения интеграла в (1), надо вынести за знак интеграла зависимость t-матрицы от z. Разложим с этой целью $t(k,q',z)$ в ряд по степеням $\sqrt{z}$ в малой окрестности точки $z = 0$. Конкретный вид ряда не играет роли (это может быть ряд Тэйлора, Лорана или Миттаг – Леффлера). Запишем для определенности ряд

Тэйлора в области аналитичности по k функции t :

$$t(k, q', z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(k, q')(\sqrt{z})^n. \qquad (7)$$

С помощью (7) интеграл в уравнении ЛШ (1) можно записать в области равномерной сходимости ряда (7) в виде

$$\int_0^\infty \frac{V(q, k)\, t(k, q', z)}{z - k^2/2\mu} k^2 dk = \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{z})^n \int_0^\infty \frac{V(q, k)\, C_n(k, q')}{z - k^2/2\mu} k^2 dk. \qquad (8)$$

После замены переменной ($\zeta = k^2/2\mu$) мы приходим к интегралам вида (4) в качестве коэффициентов ряда (8). Аналитически продолжая с помощью (6) каждый член ряда (8) и суммируя результат по формуле (7), мы приходим к уравнению вида (z в I_-)

$$t_-(q, q', z) = V(q, q') + 4\pi \int_0^\infty \frac{V(q, k)\, t_-(k, q', z)}{z - k^2/2\mu} k^2 dk + i8\pi^2 \mu \sqrt{2\mu z}\; V \times$$
$$\times (q, \sqrt{2\mu z})\, t_-(\sqrt{2\mu z}, q', z), \qquad (9)$$

которое и является искомым аналитическим продолжением уравнения ЛШ на нефизический лист. Легко убедиться в правильности вывода уравнения (9), рассмотрев любой потенциал, позволяющий получить решение уравнения (1) (и, следовательно, (9)) в аналитическом виде. Нетрудно показать (например, используя аппроксимацию потенциала по методу Бейтмана с любым числом разрезов), что для потенциала, записанного в виде произвольной суммы сепарабельных слагаемых, решение уравнения (9) совпадает с аналитическим продолжением по формуле (6) решения уравнения (1). Аналитическое продолжение решения уравнения ЛШ (1), найденного по методу Бейтмана, было использовано в [16] для нахождения виртуального состояния пары нейтрон – протон в состоянии $^1S_0$. Более удобная для применений форма уравнения ЛШ на нефизическом листе получается из (9), если выразить $t_-(\sqrt{2\mu z}, q', z)$ с помощью того же уравнения (9). При этом уравнение ЛШ в I_- приобретает вид обычного интегрального уравнения Фредгольма

$$t_-(q, q', p^2/2\mu) = V(q, q') + 8\pi\mu \int_0^\infty \frac{V(q, k)\, t_-(k, q', p^2/2\mu)}{p^2 - k^2} k^2 dk +$$
$$+ F(q, p)\left[V(p, q') + 8\pi\mu \int_0^\infty \frac{V(p, k)\, t_-(k, q', p^2/2\mu)}{p^2 - k^2} k^2 dk \right]. \qquad (10)$$

где

$$F(q, p) = \frac{i8\pi^2 \mu p V(q, p)}{1 - i8\pi^2 \mu p V(p, p)}, \qquad (11)$$

$p = \sqrt{2\mu z}$ – арифметическое значение корня. Нетрудно увидеть из уравнения (9) для $t_-(p,\ q', p^2/2\mu)$, что нуль знаменателя в (11) не является полюсом t-матрицы. Сведя уравнение (10) с помощью какой-либо квадратуры к алгебраической системе уравнений, можно найти все полюса t как функции от z в I_-, не решая уравнения (10), из условия равенства нулю детерминанта соответствующей однородной системы алгебраических уравнений точно так же, как определяют энергии связанных состояний. При выводе уравнений (9)–(10) мы не использовали условия унитарности S-матрицы, поэтому формально их можно применять и для случая комплексного потенциала (надо помнить, однако, что сама природа скачка амплитуды рассеяния на правом разрезе тесно связана с соотношением унитарности, что используется, например, при выводе дисперсионных соотношений). Из уравнения (10) сразу следует уравнение для вершинной функции распада резонансного или виртуального состояния $g(q)$. Вблизи соответствующего полюса при $z = z_0$ можно записать

$$t_-(q,\ q',\ z) \approx \frac{g(q)\,g(q')}{z - z_0}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10) и отбрасывая слагаемые, не содержащие полюса, получаем уравнение

$$g(q) = 4\pi \int_0^\infty \frac{[V(q,\ k) + F(q,\ p_0)\,V(p_0,\ k)]}{z_0 - k^2/2\mu}\, g(k)\, k^2\, dk. \tag{13}$$

Как и для связанного состояния, это уравнение однородно, поэтому нужно отнормировать $g(q)$, используя равенство (12),

$$g^2(q) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, t_-(q,\ q,\ z) = r(q,\ q,\ z_0), \tag{14}$$

где

$$r(q,\ q,\ z) = (z - z_0)\, t_-(q,\ q,\ z). \tag{15}$$

Таким образом, для нахождения нормировки g достаточно решить уравнение (10) в нескольких точках $z \neq z_0$ на прямой, проходящей через точку z_0, и затем найти $r(q,\ q,\ z_0)$ и, следовательно, g^2 по (14) с помощью интерполяции.

В заключение отметим, что предложенный в данной работе способ аналитического продолжения на нефизический лист интегральных уравнений многоканальной задачи, позволяя выходить на любой лист римановой поверхности энергии. Это относится к системам уравнений ЛШ, дисперсионного метода и уравнениям Фаддеева, которые будут рассмотрены в отдельной работе.

Институт ядерной физики
Московского
государственного университета
им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
9 февраля 1981 г.

Литература

[1] A.Yokosawa. In. Proc. of the Meeting on Exotic Resonances. Hiroshima, Japan, September 1 – 2, 1978.

[2] I.P.Auer et al. Nucl. Phys., A335, 193, 1980.

[3] P.E.Argan. Phys. Rev. Lett., 46, 96, 1981.

[4] Л.А.Кондратюк, И.С.Шапиро. ЯФ, 12, 401, 1970.

[5] V.B.Belyaev et al., J. Phys. G:Nucl. Phys., 5, 1057, 1979.

[6] W.M.Kloet, R.R.Filbar. Nucl. Phys., A338, 281, 317, 1980; Phys. Rev. Lett., 45, 970, 1980; W.M.Kloet et al. Psevdoresonance behaviour in nucleon-nucleon scattering. Preprint RU-80-238, 1980.

[7] И.С.Шапиро. УФН, 125, 577, 1978; I.S.Shapiro. Phys. Rep., 35C, 129, 1978.

[8] L.Montanet. Experim. review on the baryon-antibaryon interaction (submit. to the V Intern. Conf. on Meson Spectroscopy, Boston, 29 – 30, April, 1977), Phys. Rep., 63, 201, 1980.

[9] О.Д.Далькаров и др. ЯФ, 17, 1321, 1973.

[10] Ю.В.Орлов, А.А.Тилявов. Письма в ЖЭТФ, 28, 261, 1978; ЯФ, 30, 497, 1979.

[11] Ф.А.Гареев и др. Препринт ОИЯИ, Р4-12001, Дубна, 1978.

[12] L.P.Kok. Phys. Rev. Lett., 45, 427, 1980.

[13] В.де Альфаро, Т.Редже. Потенциальное рассеяние. М., изд. Мир, 1966.

[14] Дж.Е.Браун, А.Д.Джексон. Нуклон-нуклонные взаимодействия. М., Атомиздат, 1979.

[15] Ф.Д.Гахов. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

[16] В.Б.Беляев, Б.Ф.Иргазиев, Ю.В.Орлов. ЯФ, 24, 44, 1976.