

# Статистическое восстановление квантовых состояний оптических трехуровневых систем

Ю. И. Богданов<sup>\*1)</sup>, Л. А. Кривицкий<sup>1)</sup>, С. П. Кулик<sup>1)</sup>

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992 ГСП-2, Москва, Россия

<sup>\*</sup> Российское агентство по системам управления, "Ангстрем", 124460 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 июля 2003 г.

Рассматривается процедура измерения и последующего восстановления квантового состояния трехуровневой оптической системы, реализованной на частотно и пространственно вырожденном двухфотонном поле. Развита метод статистического оценивания квантового состояния на основе решения уравнения правдоподобия и анализа статистических свойств получаемых оценок. Используя корневой метод оценки квантовых состояний, по измеренным моментам четвертого порядка по полю восстановлена исходная волновая функция бифотонов-кутритов.

PACS: 03.67.Hk, 42.25.Ja, 42.50.Dv

**Введение.** Умение измерять квантовые состояния, безусловно, представляет интерес с фундаментальной точки зрения, поскольку дает инструмент для анализа таких базовых представлений квантовой теории, как принципиально статистический характер ее предсказаний, принцип суперпозиции, принцип дополнителности Н. Бора и др. Под измерением квантового состояния будем понимать двухэтапную *измерительно-вычислительную процедуру*. Первый этап представляет, собственно, процедуру измерения – совокупность операций над представителями квантового статистического ансамбля (чистого или смешанного), в результате которой у экспериментатора оказывается набор зарегистрированных частот тех или иных событий. Второй этап – это математическая процедура восстановления квантового состояния объекта по совокупности полученных статистических данных.

Настоящая работа посвящена восстановлению состояния оптических трехуровневых систем. Такие состояния получаются, например, в поляризационном представлении частотно и пространственно вырожденного двухфотонного поля [1]. Необходимость в правильном измерении состояний подобных систем вызвана и прикладными задачами. Так, увеличение секретности распределения ключа в квантовой криптографии связывается с увеличением размерности гильбертова пространства используемых состояний [2]: здесь определенные надежды возлагаются на трехуровневые системы или кутриты [3, 4].

## 1. Бифотоны как трехуровневые системы.

Бифотонное поле представляет собой когерентную смесь двухфотонных фоковских состояний  $|1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}'}\rangle$  и вакуумного  $|vac\rangle$  состояния [5]:

$$|\Psi\rangle = |vac\rangle + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} F_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} |1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}'}\rangle, \quad (1)$$

где коэффициенты  $F_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$  называются амплитудами бифотонов [6], а  $|1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}'}\rangle$  обозначает состояние с одним (сигнальным) фотоном в моде  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_s$  и одним (холостым) фотоном в моде  $\mathbf{k}' \equiv \mathbf{k}_i$ . Будем рассматривать коллинеарный и вырожденный режимы, когда  $\mathbf{k}_s \approx \mathbf{k}_i$  и  $\omega_s \approx \omega_i \approx \omega_p/2$ ,  $\omega_s + \omega_i = \omega_p$ , где  $\omega_p$  – частота лазерной накачки. Методика приготовления, преобразования и измерения этих состояний подробно изложена в работах [7–10]. Исходное состояние, подлежащее измерению и последующему восстановлению, имеет следующий вид:

$$|\Psi\rangle = c_1|2, 0\rangle + c_2|1, 1\rangle + c_3|0, 2\rangle. \quad (2)$$

Здесь использовано представление поляризационного состояния двухфотонного света (1) в фоковском базисе. Например, запись  $|2, 0\rangle$  означает, что оба фотона находятся в горизонтальной ( $H$ ) поляризационной моде, а в вертикальной моде ( $V$ ) фотонов нет.

Состояние трехуровневой системы в квантовой теории информации получило название *кутрит*. Свойства бифотонов-кутритов и их геометрическое представление на сфере Пуанкаре приводятся в работе [8].

Идея приготовления и измерения состояния (2) предложена в [9, 10]. Система регистрации

<sup>1)</sup>e-mail: postmast@qopt.phys.msu.ru; bogdan@angstrom.ru

бифотонов-кутритов состоит из светоделителя и пары детекторов, выходы которых соединены со схемой совпадений фотоотсчетов (см. рисунок). Зарегистрированным событием считается появление

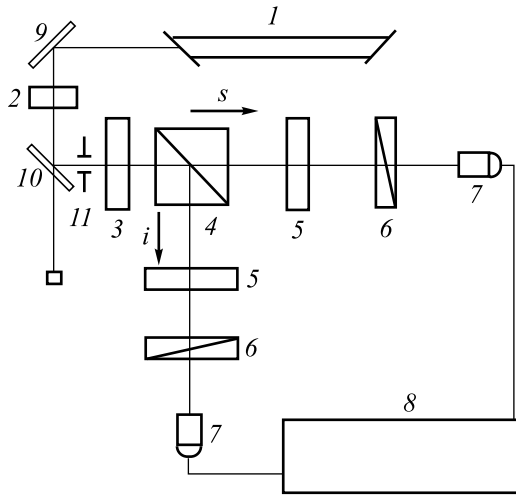


Схема экспериментальной установки: 1 – аргонный лазер ( $\lambda_p = 351$  нм); 2 – кристалл иодата лития, в котором происходит генерация бифотонов с центральной длиной волны 702 нм; 3 – задающая кварцевая пластинка с параметрами ( $\alpha, \delta = 32.82$ ); 4 – светоделитель, направляющий (условно) сигнальные фотоны направо, а холостые – вниз; 5 – четверть-волновые пластинки ( $\chi_{s,i}, \delta = \pi/4$ ); 6 – поляризационные призмы ( $\gamma_{s,i}$ ); 7 – детекторы, работающие в режиме счета фотонов; 8 – схема парных совпадений; 9 – поворотное зеркало; 10 – зеркало, пропускающее излучение на длине волны 351 нм и отражающее излучение на длине волны 702 нм; 11 – диафрагма, осуществляющая пространственную селекцию мод

импульса на выходе схемы совпадения. Примерно в половине всех случаев один из фотонов (условно, сигнальный), составляющих бифотон, направляется к одному детектору, а другой (холостой) – ко второму. В остальных случаях оба фотона попадают в одно плечо светоделителя – такие события не регистрируются, поскольку они не приводят к совпадениям. Поляризационные преобразования осуществляются с помощью четверть-волновой пластинки и поляризационной призмы, установленными перед каждым детектором. В [9, 10] было показано, что если состояние кутрита неизвестно, то необходимо выполнить девять проекционных измерений моментов для полного воссоздания исходного состояния, которое в общем случае является смешанным. Эти моменты имеют вид [11]:

$$R_{s,i} \sim \langle (b'_s)^\dagger (b'_i)^\dagger b'_s b'_i \rangle = R(\chi_s, \gamma_s, \chi_i, \gamma_i), \quad (3)$$

где  $(b'_j)^\dagger, b'_j$  – операторы рождения и уничтожения фотонов в сигнальной и холостой модах  $j = s, i$  после преобразования, а  $\chi_j, \gamma_j$  – параметры установки – углы ориентации пластинок и поляризаторов, соответственно.

Таблица 1

$\nu$	Параметры экспериментальной установки				Амплитуда процесса
	$\chi_s$	$\gamma_s$	$\chi_i$	$\gamma_i$	$M_\nu$
1	$0^\circ$	$-90^\circ$	$0^\circ$	$-90^\circ$	$\frac{c_1}{\sqrt{2}}$
2	$0^\circ$	$-90^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$\frac{c_2}{2}$
3	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$\frac{c_3}{\sqrt{2}}$
4	$45^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}c_2 - \frac{i}{2}c_3$
5	$45^\circ$	$-45^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}c_2 - \frac{i}{2}c_3$
6	$45^\circ$	$-45^\circ$	$0^\circ$	$-90^\circ$	$\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}c_2$
7	$45^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$-90^\circ$	$\frac{1}{2}c_1 - \frac{i}{2\sqrt{2}}c_2$
8	$-45^\circ$	$-22.5^\circ$	$45^\circ$	$-22.5^\circ$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}c_1 + \frac{i}{2\sqrt{2}}c_3$
9	$-45^\circ$	$-45^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}c_1 - \frac{i}{2\sqrt{2}}c_3$

Время, в течение которого проводилось измерение каждого из девяти моментов, являлось одним из параметров эксперимента – обычно оно составляло 100 мс. Отдельное измерение повторялось трижды – каждый раз по 700–800 усреднений, после чего схема перенастраивалась – углы  $\chi_j, \gamma_j$  устанавливались в соответствии с томографическим протоколом (табл.1) и цикл повторялся. Таким образом, выходными данными измерительной установки являлись средние скорости числа совпадений фотоотсчетов в единицу времени  $R_{1,2,\dots,9}$ . Чтобы иметь возможность сравнить результаты процедуры восстановления с параметрами входных состояний, которые должны быть известны с высокой точностью, мы использовали следующий способ их приготовления. Бифотоны получались в процессе коллинеарного частотно-вырожденного спонтанного параметрического рассеяния в кристалле иодата лития. Поляризация обоих рождающихся фотонов была вертикальная, то есть генерировалось состояние

$$|c'\rangle = |0, 2\rangle. \quad (4)$$

Далее это состояние преобразовывалось с помощью пластинки из кристаллического кварца, толщина которой была задана и составляла  $h = 824 \pm 1$  мкм. При повороте пластинки в плоскости, ортогональной падающему пучку бифотонов – в этой плоскости лежала оптическая ось пластинки, состояние (2) преобразовывалось по правилу:

$$|c\rangle_{in} = G|c'\rangle, \quad (5)$$

где матрица

$$G = \begin{pmatrix} t^2 & \sqrt{2}tr & r^2 \\ -\sqrt{2}tr^* & |t|^2 - |r|^2 & \sqrt{2}t^*r \\ r^{*2} & -\sqrt{2}t^*r^* & t^{*2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

описывает действие пластинки с эффективными коэффициентами пропускания  $t$  и отражения  $r$ :  $t = \cos \delta + i \sin \delta \cos 2\alpha$ ,  $r = i \sin \delta \sin 2\alpha$ . Здесь введена оптическая толщина  $\delta = \pi|n_o - n_e|d/\lambda$  и угол  $\alpha$  между оптической осью пластинки и вертикалью. Для кристаллического кварца на длине волны  $\lambda = 702$  нм величина  $|n_o - n_e| = 0.0089$ , откуда  $\delta = 32.82 \pm 0.04$ .

Итак, унитарное преобразование (5) обеспечивало набор состояний  $c_{in}(\alpha)$ , который подавался на измерительную часть установки. Восстановление этих состояний и являлось целью настоящей работы.

**2. Статистическое восстановление бифотонных состояний по результатам взаимно-дополнительных измерений.** При анализе экспериментальных данных мы будем опираться на так называемый корневой метод оценки квантовых состояний [12–14]. Этот метод специально разработан для анализа взаимно-дополнительных измерений<sup>2)</sup>. Преимущества рассматриваемого метода связаны с возможностью восстановления состояний в гильбертовом пространстве высокой размерности, а также с установлением фундаментальных пределов на точность восстановления неизвестного квантового состояния. При использовании асимптотически эффективных алгоритмов может быть достигнута точность восстановления, близкая к фундаментальному пределу.

Совокупность взаимно-дополнительных измерений состояния бифотонного поля была реализована в соответствии с томографическим протоколом, представленным в табл.1. Основная доступная для измерения величина – это интенсивность генерации событий:  $R_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, 9$ . Моменты  $R_\nu$  представляют собой частоты совпадений и измеряются в единицах частоты – Герцах. Число рассматриваемых событий за любой определенный промежуток времени подчиняется распределению Пуассона. Таким образом, величины  $R_\nu$  задают интенсивности соответствующих взаимно-дополнительных пуассоновских процессов и выступают в качестве оценок параметров Пуассона  $\lambda_\nu$  (см. ниже).

Интенсивность генерации событий в каждом процессе может быть представлена как квадрат модуля соответствующей амплитуды:

$$R_\nu = M_\nu^* M_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, 9. \quad (7)$$

Амплитуды процессов не могут быть измерены непосредственно, но как раз они и представляют наибольший интерес как величины, описывающие фундаментальные закономерности квантовой физики. Из принципа суперпозиции следует, что амплитуды связаны линейно с компонентами вектора состояния. Задача квантовой томографии заключается в том, чтобы, основываясь на экспериментально измеряемых интенсивностях генерации событий, восстанавливать скрытые от непосредственного наблюдения амплитуды процессов и векторы состояний.

Линейное преобразование вектора состояния  $c$  в амплитуду процесса  $M$  задается некоторой матрицей  $X$ , которую легко получить из табл.1:

$$X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/(2\sqrt{2}) & -i/2 \\ 0 & 1/(2\sqrt{2}) & -1/2 \\ 1/2 & -1/(2\sqrt{2}) & 0 \\ 1/2 & -i/(2\sqrt{2}) & 0 \\ 1/(2\sqrt{2}) & 0 & i/(2\sqrt{2}) \\ 1/(2\sqrt{2}) & 0 & -1/(2\sqrt{2}) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Тогда совокупность всех девяти амплитуд процессов может быть выражена одним матричным уравнением:

$$Xc = M. \quad (9)$$

Назовем матрицу  $X$  аппаратной матрицей совокупности взаимно-дополнительных измерений по аналогии с известной аппаратной функцией. В терминах статистики соотношение (9) – это уравнение линейной регрессии. Отличительная особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что в эксперименте приближенно измеряется только абсолютная величина правой части уравнения. Оценка абсолютной величины амплитуды дается квадратным корнем из соответствующей экспериментально измеренной частоты совпадений:

$$|M_\nu|^{\text{exp}} = \sqrt{k_\nu/t}, \quad (10)$$

где  $k_\nu$  – число событий, зарегистрированных в  $\nu$ -м процессе за время экспозиции  $t$ .

<sup>2)</sup> В смысле принципа дополнительности Н. Бора.

Важно отметить, что, действуя операцией извлечения квадратного корня на пуассоновскую случайную величину, мы получаем случайную величину с однородной дисперсией - имеет место стабилизация дисперсии [13,15]. Заметим также, что поскольку предметом нашего рассмотрения являются не вероятности, а частоты или интенсивности событий, удобно использовать ненормированные векторы состояния. Такие векторы позволяют представить скорости счета совпадений (интенсивности генерации событий) непосредственно по формулам табл.1 без введения коэффициентов, связанных со скоростью генерации бифотонов, эффективностями детекторов и т.п. Размерность определенного таким образом вектора состояния есть  $1/\sqrt{\text{время}}$ . Итоговый вектор состояния, возникающий в результате процедуры восстановления, будем, однако, нормировать на единицу.

Учитывая независимость и одинаковость дисперсии различных  $|M_\nu|^{\text{exp}}$ , можно применить к уравнению (11) стандартную оценку наименьших квадратов [16].

$$\hat{c} = (X^+ X)^{-1} X^+ \widehat{M}. \quad (11)$$

В отличие от традиционного метода наименьших квадратов, полученное соотношение не является явным выражением для оценки вектора состояния  $c$ , а представляет собой уравнение, решаемое методом итерации. Модуль величины  $\widehat{M}$  известен из эксперимента ( $|\widehat{M}_\nu| = |M_\nu|^{\text{exp}}$ ), а ее фаза определяется самой итерационной процедурой (считается, что фаза вектора  $Xc$  на  $i$ -м итерационном шаге определяет фазу вектора  $\widehat{M}$  на  $i + 1$ -м шаге). Оказывается, что в гауссовском приближении для пуассоновских величин представленная здесь оценка наименьших квадратов совпадает с более точной и строгой оценкой максимального правдоподобия, рассмотренной ниже.

### 3. Метод максимального правдоподобия.

Функция правдоподобия определяется произведением пуассоновских вероятностей:

$$L = \prod_i \frac{(\lambda_i t_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda_i t_i}, \quad (12)$$

где  $k_i$  - число совпадений, наблюдавшееся в  $i$ -м процессе за время экспозиции  $t_i$ ,  $\lambda_i$  - неизвестные теоретические интенсивности генерации событий (совпадений фотоотсчетов), оценка которых и является предметом рассмотрения,  $i = 1, 2, \dots, 9$ .

Логарифмическое правдоподобие (логарифм от функции правдоподобия) есть

$$\ln L = \sum_i (k_i \ln(\lambda_i t_i) - \lambda_i t_i), \quad (13)$$

где отброшена несущественная константа.

Введем также матрицы, элементы которых определяются следующими формулами:

$$I_{sj} = \sum_i t_i X_{is}^* X_{ij}, \quad (14)$$

$$J_{sj} = \sum_i \frac{k_i}{\lambda_i} X_{is}^* X_{ij}, \quad s, j = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Матрица  $I$  определяется протоколом эксперимента и, таким образом, известна априори (до опыта). Она совпадает с так называемой матрицей информации Фишера (см. ниже). Напротив, матрица  $J$  определяется результатами эксперимента  $k_i$ , а также неизвестными интенсивностями "рождения" событий  $\lambda_i$ . Посредством введенных матриц условие экстремума функции (13) может быть представлено в следующем компактном виде:

$$Ic = Jc, \quad (16)$$

откуда

$$I^{-1}Jc = c. \quad (17)$$

Последнее соотношение и будем называть уравнением правдоподобия. Это нелинейное уравнение, поскольку  $\lambda_i$  сами зависят от неизвестного вектора состояния  $c$ . Имея простую квазилинейную структуру, полученное уравнение легко решается методом итераций [12-14]. Оператор  $I^{-1}J$  можно назвать квазиединичным. Отметим, что как единичный он действует только на один единственный вектор в гильбертовом пространстве, а именно на вектор, дающий решение (17) и представляющий собой максимально правдоподобную оценку вектора состояния. Условие существования матрицы  $I^{-1}$  есть условие, накладываемое на исходный протокол эксперимента<sup>3</sup>). Полученная система уравнений автоматически содержит условие нормировки, которое имеет вид

$$\sum_i k_i = \sum_i (\lambda_i t_i). \quad (18)$$

Это условие означает, что полное число зарегистрированных событий во всех процессах равно сумме произведений интенсивностей регистрации событий на время экспозиции.

Элементы матрицы информации Фишера определяются средним значением от произведения производных функции логарифмического правдоподобия [12-14]

$$I_{sj} = \frac{\partial \ln L}{\partial c_j} \frac{\partial \ln L}{\partial c_s^*}, \quad (19)$$

<sup>3</sup>Излагаемая теория справедлива не только для матрицы  $X$  специального вида (8), но и в общем случае.

Таблица 2

№	Угол $\alpha$ град.	Число событий $\sum_{\nu=1}^9 k_{\nu}$	Вектор состояния		$F$	$\chi^2$
			Теория $c_1, c_2, c_3$	Эксперимент $c_1, c_2, c_3$		
1	17.5	2012	0.3094, 0.6248 + 0.1921i, 0.5713 + 0.3880i,	0.3549, 0.5620 + 0.2684i, 0.5467 + 0.4328i	0.9946	15.925*
2	22.5	1997	0.4702, 0.6649 + 0.2368i, 0.4105 + 0.3349i	0.4961, 0.6444 + 0.2486i, 0.4017 + 0.3399i	0.9990	3.6482
3	25	6119	0.5518, 0.6548 + 0.2566i, 0.3289 + 0.3045i	0.5234, 0.6637 + 0.2446i, 0.3687 + 0.2997i	0.9979	16.384*
4	27.5	1281	0.6310, 0.6248 + 0.2744i, 0.2497 + 0.2717i	0.6466, 0.6184 + 0.2897i, 0.2521 + 0.2281i	0.9976	7.4987
5	30	2245	0.7053, 0.5758 + 0.2901i, 0.1754 + 0.2368i,	0.7266, 0.5890 + 0.1900i, 0.2224 + 0.1992i	0.9921	26.977*
6	32.5	2753	0.7724, 0.5094 + 0.3036i, 0.1083 + 0.2002i	0.7953, 0.5107 + 0.2519i, 0.1217 + 0.1685i	0.9967	11.239

где  $\ln L$  дается формулой (13). Усреднение в (19) будем производить в предположении пуассоновского характера регистрации событий. Поэтому

$$I_{sj} = \sum_i \frac{t_i}{\lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_j} \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_s^*}. \quad (20)$$

Выражение для матрицы информации Фишера радикально упрощается и принимает вид (14), если перейти в соответствии с (7) от частот (интенсивностей) рождения событий к амплитудам процессов.

Если времена экспозиции для всех процессов одинаковы ( $t = t_i = \text{const}$ ), то

$$I = t(X^+ X). \quad (21)$$

Таким образом, матрица информации Фишера, по существу, определяется временем наблюдения за квантовым статистическим ансамблем. Другими словами, время здесь выступает как наиболее фундаментальная мера информации.

**4. Анализ экспериментальных данных.** Примеры восстановления состояний кутритов методом максимального правдоподобия приведены в табл.2. В предпоследней колонке приведены значения параметра согласия  $F$  (fidelity), определяемого соотношением

$$F = \langle c | \rho | c \rangle \xrightarrow{\text{чистое состояние}} |\langle c_{\text{расчет}} | c_{\text{эксперимент}} \rangle|^2 \quad (22)$$

и показывающего, в данном случае, меру соответствия теоретического и экспериментального векторов состояния. Звездочкой (\*) обозначены значения  $\chi^2$  экспериментов, превышающие критическое значение 11.345 на уровне достоверности 99%. Для этих экспериментов можно с гарантией 99% утверждать, что неточности установок параметров измерений и их нестабильность являются статистически значимыми. Другими словами, сравнение результатов восстановления с фундаментальным статистическим уровнем точности, может служить основой для таких задач, как юстировка установки, контроль стабильности ее работы, обнаружение постороннего вмешательства в систему и др. Так при малых объемах выборки превалируют статистические погрешности, в то время как при больших – неточности и нестабильности установок параметров протокола. В нашем случае время наблюдения было таково, что существенную роль играли оба указанных выше типа погрешностей. Для части экспериментов значения  $\chi^2$  оказались ниже критического уровня, а для части – выше. Чем больше объем выборки, при котором еще не проявляются погрешности и нестабильности работы установки, тем выше качество эксперимента<sup>4)</sup>.

<sup>4)</sup> Соответствующее количество измерений можно назвать объемом когерентности.

Процесс накопления квантовой информации описывается выражениями (14) и (21): по мере увеличения времени измерения происходит разрушение квантовых состояний все большего числа представителей ансамбля и извлекается все большее количество информации об изучаемом объекте. При этом статистическая погрешность становится все меньше. Таким образом, только ошибки первого типа (статистические) носят принципиальный квантовый характер. Ошибки второго типа (ошибки установок), по существу, являются классическими: они связаны с неполнотой знаний исследователя, то есть объективно существует более точная информация, просто она не доступна экспериментатору.

Процедура приготовления состояний, рассмотренная в разд.1, предполагает, что в измерительную часть установки попадают чистые состояния вида (2). Тот же вывод можно сделать из анализа данных: сравнение результатов восстановления квантового состояния в приближении чистого ансамбля с результатами разделения смеси на две компоненты – так называемый квази-байесовский алгоритм [14], показывает, что оценка чистого вектора состояния очень близка к оценке главной компоненты матрицы плотности.

**Заключение.** В работе рассмотрена процедура измерения квантового состояния трехуровневой оптической системы, реализованной на частотно и пространственно вырожденном бифотонном поле. Развита методология статистической оценки квантового состояния, включающая решение уравнения правдоподобия и изучение статистических свойств получаемых оценок. На основе экспериментальных данных – измеренных моментов четвертого порядка по полю – и корневого метода оценки квантовых состояний восстановлена исходная волновая функция бифотонокутритов. Проанализированы неточности установок параметров измерений в тех случаях, когда их нестабильность является статистически значимой.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследова-

ований (гранты # 02-02-16843 и # 03-02-16444) и INTAS # 2122-01.

1. А. В. Бурлаков, Д. Н. Клышко. Письма в ЖЭТФ **69**, 795 (1999).
2. H. Bechmann-Pasquinucci and W. Tittel, Phys. Rev. **A61**, 062308 (2000).
3. Bechmann-Pasquinucci and A. Peres, Phys. Rev. Lett. **85**, 3313 (2000).
4. M. V. Chekhova, S. P. Kulik, G. A. Maslennikov, and A. A. Zhukov, quant-ph/0305115.
5. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, М.: Наука, 1980, с. 256.
6. A. V. Belinsky and D. N. Klyshko, Laser Physics **4**, № 4, 663 (1994).
7. A. V. Burlakov, M. V. Chekhova D. N. Klyshko et al., Phys. Rev **A60**, 4209 (1999).
8. А. В. Бурлаков, М. В. Чехова, Письма в ЖЭТФ **75**, 505 (2002).
9. А. В. Бурлаков, Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик и др., *Оптика и спектроскопия* **94**, 744 (2003).
10. Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик, А. Н. Пенин, М. В. Чехова, ЖЭТФ **124**, вып.4(10) (2003) (в печати).
11. Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **111**, 1955 (1997).
12. Ю. И. Богданов, *Основная задача статистического анализа данных: корневой подход*, М.: МИЭТ, 2002. Yu. I. Bogdanov, *Fundamental Problem of Statistical Data Analysis: Root Approach*, М.: МИЭТ, 2002. Yu. I. Bogdanov, LANL Report physics/0211109, 2002.
13. Yu. I. Bogdanov, *Quantum Mechanical View of Mathematical Statistics*, Progress in Quantum Physics Research. Nova Science. NY. 2003; LANL Report quant-ph/0303013, 2003.
14. Yu. I. Bogdanov, *Root Estimator of Quantum States*, Progress in Quantum Physics Research. Nova Science. NY, 2003; LANL Report quant-ph/0303014, 2003.
15. Г. Крамер, *Математические методы статистики*, М.: Мир. 1975.
16. М. Кендалл, А. Стьюарт, *Статистические выводы и связи*, М.: Наука, 1973.
17. *Оптические материалы для инфракрасной техники*, М.: Мир, 1965.