

# Исследование неустойчивостей бесстолкновительных систем по стохастическим траекториям

В. А. Вшивков<sup>+</sup>, С. А. Никитин\*, В. Н. Снытников<sup>о1)</sup>

<sup>+</sup>Институт вычислительных технологий Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

\*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>о</sup>Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск Россия

Поступила в редакцию 28 мая 2003 г.

После переработки 11 августа 2003 г.

Предложен практический метод выделения стохастической и регулярной подсистем из всего множества частиц для задач численного моделирования развития физической неустойчивости в бесстолкновительных системах с самосогласованным полем. Метод разделения фазового пространства на подсистемы основан на сравнении результатов двух вычислительных экспериментов с идентичными начальными условиями, но с разными реализациями ошибок округления. На примере задачи о гравитирующем диске определены пространственные и временные области развития коллективной неустойчивости и значения ее инкрементов.

PACS: 01.30.Vv, 96.35.–j

В гравитационных и плазменных бесстолкновительных системах может происходить самоорганизация. В этом процессе система переходит от начального неустойчивого к новому устойчивому состоянию для заданных условий. Исследования неустойчивостей ведутся, в частности, с помощью уравнения сохранения фазового объема Власова–Лиувилля и уравнения дальнегодействующего самосогласованного поля Пуассона [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \mathbf{a} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho.$$

Эта система уравнений, как правило, решается численно методом частиц [2,3], суть которого состоит в расчете самосогласованной динамики конечного, но очень большого количества частиц. Их траектории предопределены расчетным кодом на компьютере даже при моделировании самоорганизации и динамического хаоса в отличие от экспериментов в реальных условиях, где свой вклад в динамику вносят случайные возмущения. Поэтому в расчетах при анализе коллективной, самосогласованной динамики частиц возникает проблема распознавания физической неустойчивости среди нестационарных устойчивых решений. Попытка наложить дополнительно какие-либо конечные возмущения на траектории частиц

для проверки их устойчивости сталкивается с вопросами о множественности решений исходных уравнений и о зависимости решений от начальных данных. В настоящей работе сообщается о методе изучения неустойчивости, который не связан с дополнительными возмущениями, с видом начальных условий, а также с теоретическим анализом ее инкрементов в системе большого числа частиц. Этот метод находит частицы регулярного движения среди стохастических и разделяет частицы на регулярную и стохастическую подсистемы в ОДНОЙ компьютерной реализации процесса развития неустойчивости. В проводимых вычислительных экспериментах с числом частиц до  $10^9$  и более [4] используемый подход состоит в возможности и необходимости проанализировать динамику всех частиц. Для сравнения, число звезд в галактиках составляет  $10^{10}$  и выше.

Идея метода состоит в рассмотрении ЭВМ как физической экспериментальной установки. На этой установке в фазовых координатах частиц присутствуют ошибки округления как физические флуктуации, которые детерминированно задаются расчетным кодом и типом процессора в виде конкретной реализации случайных чисел. Для регулярных устойчивых траекторий накопление этих ошибок определяется устойчивым в вычислительном отношении алгоритмом. Эти ошибки возникают в последних, младших разрядах мантисс чисел. Их величина зависит в основном от числа операций, а сами значения остаются в младших разрядах. Если движение частицы

<sup>1)</sup>e-mail: snyt@catalysis.nsk.su

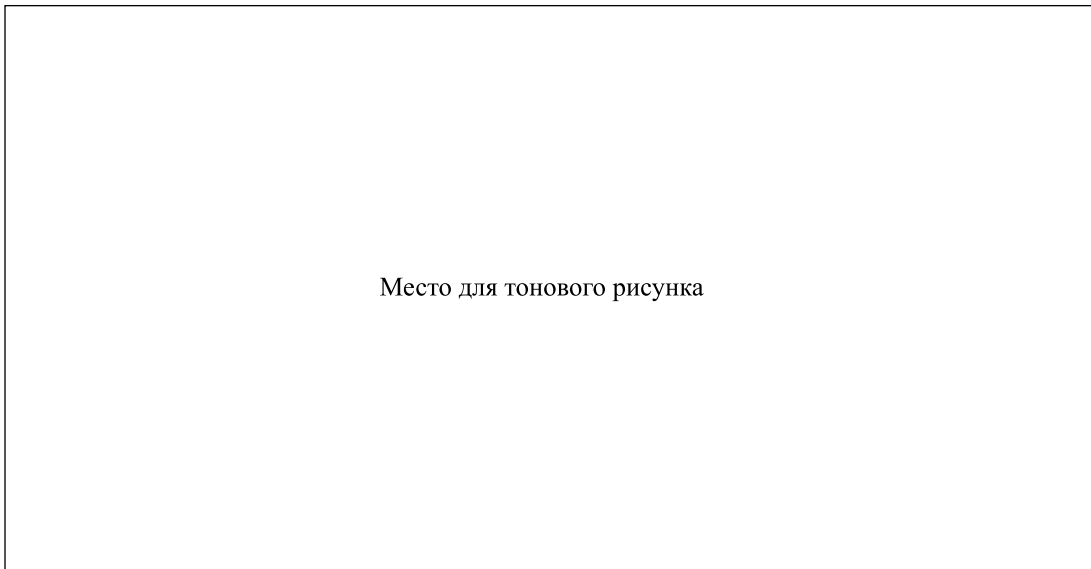
стало по какой-то причине неустойчивым, то накопление ошибок округления в ее координатах определяется инкрементами развития неустойчивости. Поэтому для частиц неустойчивого движения вычислительный алгоритм переносит случайные ошибки округления фазовых координат в старшие разряды мантисс. Эти разряды определяют основную величину числа. Вследствие неустойчивости у фазовых траекторий частиц появляется стохастичность. Выделить накопившуюся случайную часть значений чисел и, тем самым, разделить устойчивые регулярные и неустойчивые стохастические траектории частиц можно в двух идентичных расчетах, в которых по-разному реализуются ошибки округления. Устойчивые траектории частиц в этих расчетах должны совпадать. Неустойчивые траектории должны разбегаться, в том числе, и в конфигурационном пространстве. Осуществить изменение ошибок округления возможно программно. Однако технически наиболее просто и физически ясно такие расчеты проводятся по одной и той же программе с одинаковой длиной машинного слова, с идентичными начальными данными, но на двух принципиально различных процессорах (к примеру – AMD и Intel, или Intel и Alpha 21264). При этом результаты расчетов на разных процессорах будут совпадать для задач нахождения устойчивых решений и будут различаться для задач моделирования развития физической неустойчивости.

Для реализации намеченного подхода необходимо выполнить ряд требований к численной модели с тем, чтобы отделить изучаемую физическую неустойчивость от всевозможных численных неустойчивостей алгоритмов, не имеющих какого-либо физического смысла. Во-первых, численная модель, предназначенная для изучения физической неустойчивости, должна удовлетворять условию аппроксимации исходных уравнений математической физики. Во-вторых, в ней должно присутствовать условие сходимости решений при измельчении расчетной сетки. В-третьих, она должна сохранять чувствительность к изменениям начальных данных. В-четвертых, условие устойчивости численного метода в линейном приближении неизбежно должно быть нарушено хотя бы локально. Очевидно, что приведенные требования отличаются от условий аппроксимации и устойчивости теоремы Лакса [5], которые нужны для обеспечения сходимости численного решения к решению исходной задачи. Теорема Лакса, лежащая в основе численных методов решения многих задач математической физики и отделяющая численные неустойчивости от нестационарных решений, к расче-

там физических неустойчивостей не применима. Отсюда следует пятое требование, что для проведения вычислительных экспериментов по исследованию неустойчивости в системе многих тел должны быть выполнены все законы сохранения – массы, импульса, момента импульса и энергии. С точки зрения вычислительной физики нарушение законов сохранения в бесстолкновительном методе крупных частиц являлось серьезной многолетней проблемой [6]. Эта проблема была нами изучена и найдены подходы к ее решению в [7–9] с созданием кодов, удовлетворяющих указанным требованиям [10].

В качестве примера самоорганизации мы рассчитали сценарии развития неустойчивости в гравитирующем диске с центральным телом. Нестационарный процесс моделируется в вычислительных экспериментах с числом частиц до  $10^7$  и выше. Задача решается в приближении тонкого диска [1]. В этом приближении у частиц полярные координаты и две проекции скорости без движения вдоль оси диска. Уравнение Пуассона решается в трехмерном пространстве. За начальное неравновесное условие взято твердотельное вращение диска со степенным профилем плотности. Функция распределения частиц по скоростям не удовлетворяла критерию устойчивости Тумре [1]. За характерные параметры для обезразмеривания переменных взяты определенная масса, начальный радиус диска  $R$  и гравитационная постоянная. В этих единицах начальная масса центрального тела равна 0.4, масса диска – 1.0 для частиц и столько же для газа, скорость вращения диска – 1, дисперсия скоростей – 1.0. Один оборот диска без центрального тела совершал бы за 4.0 единицы времени. Пространственная сетка имеет  $120 \times 256 \times 101$  ячеек с размерами  $0.075 \times (2\pi/256) \times 0.1$ . Для шага по времени  $\tau$  взята величина, не бóльшая среднего времени прохождения частицами расчетной ячейки. Это время существенно меньше  $1/50$  периода обращения вокруг центрального тела. Последнего условия достаточно, чтобы эффект стохастизации сепаратрисы не проявлялся из-за введения дискретной процедуры расчета траектории [11]. Число шагов, необходимых для потери частицей на устойчивой траектории информации о своем начальном положении из-за ошибок округления на 8-байтовом числе оценивается в  $10^{19}$  [12]. Джинсовская неустойчивость должна проявляться при холодном диске без центрального тела на первом обороте по начальным условиям, что соответствует примерно  $10^3$  временных шагов.

Сравнительные расчеты были проведены на процессорах AMD и Intel по программе с  $1.2 \cdot 10^6$  частиц на 8-байтовой длине чисел, а также по парал-



Место для тонового рисунка

Рис.1. Начальная (а),  $T = 0$ , и новая (b),  $T = 7.5$ , плотность вещества в диске

льной программе под MPI с загрузкой двух процессоров Intel и Alpha 21264. Датчик псевдослучайных чисел был встроен в программу. Им задавались строго идентичные начальные условия. Результаты процесса самоорганизации из неравновесного состояния приведены на рис.1, где построены начальная,  $T = 0$ , и на момент времени  $T = 7.5$  плотности частиц. Шкала почернения является логарифмической, белый цвет отличается от черного на 5 порядков. На распределении плотности обращают на себя внимание динамически устойчивые, нитеподобные структуры, изогнутые концы которых подходят к быстро вращающемуся компактному диску вокруг центрального тела. Кроме того, в правом нижнем углу примерно на диагонали квадрата имеется устойчивая солитоноподобная волна плотности, которая сформировалась как результат взаимодействия нескольких подобных волн на ранних моментах времени.

На рис.2,3 представлены результаты анализа регулярных (а) и стохастических (b) траекторий для моментов времени  $T = 2.5$  и  $T = 5.0$ . В квадратах со стороной  $6R$  приведены плотности, построенные для соответствующих подсистем частиц. Регулярное и стохастическое движения разделены по критерию разбегания траекторий каждой  $j$ -частицы более чем на 0.1 от размера сеточной ячейки:

$$\|\mathbf{r}'_j(t) - \mathbf{r}''_j(t)\| \geq 0.1 \cdot \min(h_r, h_\varphi).$$

Как следует из рис.2, к моменту  $T = 2.5$  регулярные и стохастические частицы в конфигурационном пространстве (в плоскости диска) занимают одну и ту

же область. По стохастическим частицам рис.2 выделяется основная пространственная зона, где траектории становятся неустойчивыми. Эта зона окружена “испаренными” частицами. К моменту  $T = 5.0$  (рис.3) влияние стохастических частиц распространилось практически на всю область построения плотности. Они формируют новые устойчивые солитоноподобные структуры (рис.3b). Частицы с регулярными траекториями остались на краях области и в узкой зоне вокруг центрального тела (рис.3a). К моменту  $T = 7.5$  (рис.1b) регулярных частиц практически не осталось.

Накопление во времени абсолютных значений разности в плотностях  $n'$  и  $n''$  между двумя расчетами в сумме по всей расчетной области приведено на рис.4:

$$\Delta(t) = \int_S |n'(\mathbf{r}, t) - n''(\mathbf{r}, t)| dx dy.$$

Как следует из графика, неустойчивость на линейной стадии развивается с показателем экспоненты  $\gamma \sim 9.57$  (характерное время составляет примерно 0.03 от указанного выше времени оборота диска) до момента времени  $T \approx 2.3$ . Флуктуации плотности усиливаются на девять порядков от своего начального уровня к величине  $10^{-6}$ . После этого момента начинается разбегание траекторий неустойчивых частиц с накоплением разницы в плотностях и с изменением полей. До момента времени  $T \approx 3.1$  происходит вовлечение частиц в стохастическое движение и переход регулярных частиц на новые траектории. В дальнейшем до момента времени  $T \approx 6$  наступа-

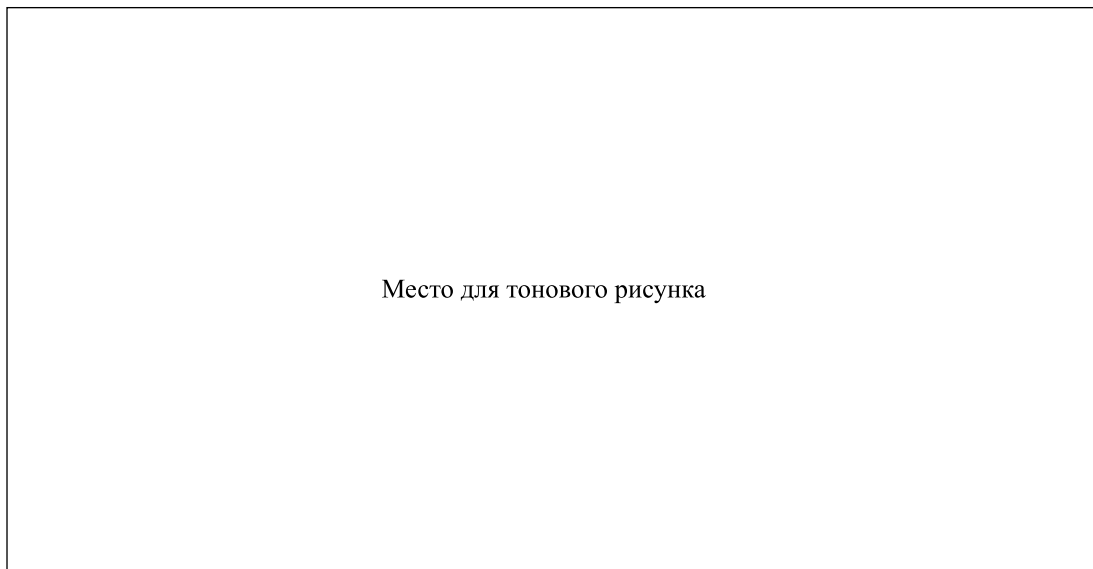


Рис.2. Распределение плотности вещества в диске ко времени  $T = 2.5$  для регулярных (а) и стохастических (b) частиц

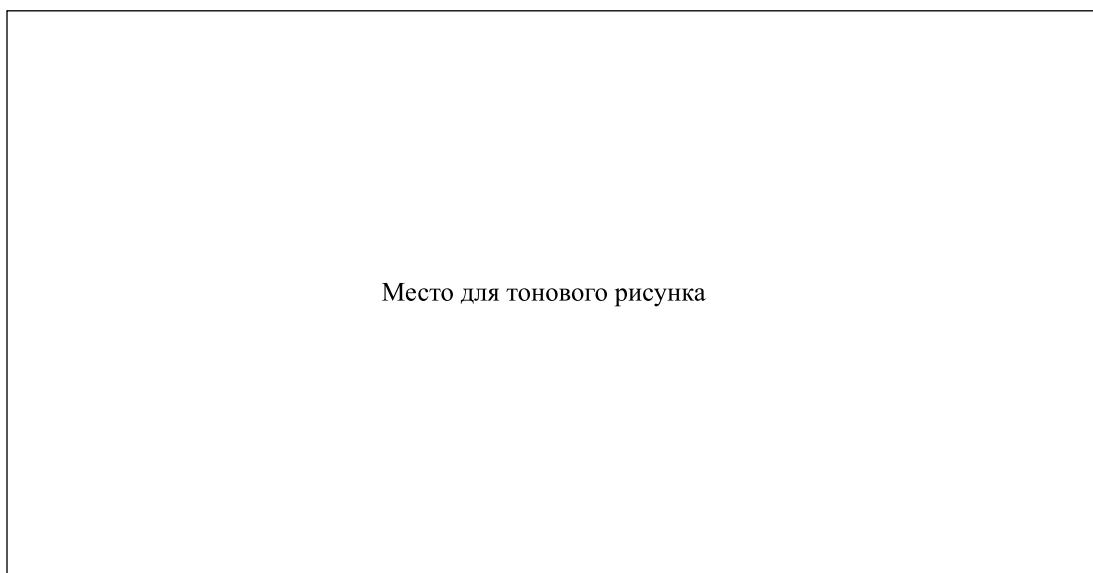


Рис.3. Распределение плотности вещества в диске ко времени  $T = 5$  для регулярных (а) и стохастических (b) частиц

ет нелинейная стадия насыщения неустойчивостей с формированием нового решения. Ориентировочно с этого момента решения в целом расходятся, демонстрируя появление нового динамического состояния (рис.1,  $T = 7.5$ ).

Контрольные расчеты на одном процессоре с разными операционными системами и транслятором (UNIX + GNU Fortran) и (Windows 2000 + Watcom Fortran) на AMD процессоре показали полную идентичность траекторий на всех временных этапах, несмотря на различие в скорости выполнения программы. Аналогичные идентичные результаты расчетов

получились для разных AMD процессоров (Duron, 800 МГц и Athlon, 1600 МГц). Расчеты с использованием параллельной версии программы показали, что результаты по сравнению с однопроцессорным вариантом как бы соответствуют новой реализации функции распределения частиц по скоростям, то есть другим траекториям частиц, которые реализуются качественно иным алгоритмом расчета. В то же время сравнение результатов расчетов, полученных на двух Intel и двух Alpha 21264 процессорах, показали динамическую картину, позволяющую отделить частицы регулярного и стохастического движений.

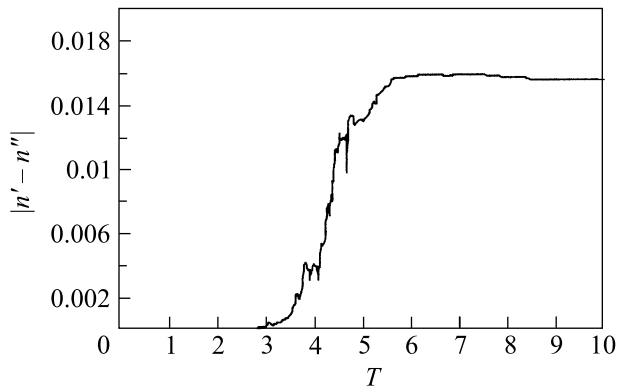


Рис. 4. Отклонение между плотностями вещества в расчетах суммарно по всей плоскости как функция времени

Подытоживая проведенные опыты, можно сделать вывод, что возможность разделения частиц на регулярные и стохастические для использованных программных средств определяется самими процессорами. Для других алгоритмов свойства компилятора могут также влиять на реализацию ошибок округления и стать основой для разделения траекторий в расчетах на однотипных процессорах.

Многочисленные расчеты с изменением параметров показали, что при развитии неустойчивости отклонения от начального состояния, являющиеся следствием случайных шумов, в первые моменты времени нарастают экспоненциально. Рост отклонений сопровождается изменением самосогласованных полей, действующих на частицы. Некоторые из частиц переходят с регулярных на стохастические траектории. По мере развития неустойчивости таких частиц становится все больше. Флуктуации, обычно малые, оказываются усиленными до неравновесного уровня. Среди них отбираются те, из которых формируется на стадии насыщения неустойчивости новое состояние. Бесстолкновительное затухание и слабые столкновения снижают оставшиеся флуктуации к термодинамически равновесному уровню случайных шумов нового состояния. Частицы в новом установившемся потенциале самосогласованного поля оказываются в режимах регулярного движения или динамического хаоса. Для расчетов на ЭВМ на стадии развития физической неустойчивости случайные ошибки округления существенно влияют на реализацию траекторий частиц. Вне развития неустойчивости во времени и пространстве эти ошибки в рамках заданного численного критерия себя не обнаруживают. Физическая неустойчивость проявляет себя через локальное накопление стохастических частиц. Области фазового пространства, где имеются эти час-

тицы, и являются зонами неустойчивости. По изменению плотности стохастических частиц (как в нашем примере, в проекции фазового пространства на конфигурационное пространство) рассчитывается локальное значение инкремента неустойчивости  $\gamma(\mathbf{r}, t)$ :

$$\sum_{i=t_0/\tau}^{i=t/\tau} [n_s(\mathbf{r}, t_0) \exp(\gamma(\mathbf{r})(t_i - t_0)) - n_s(\mathbf{r}, t_i)]^2 \rightarrow \min.$$

Время, в течение которого частицы могут стать стохастическими, можно определить как время развития неустойчивости. Это время находится в вычислительных экспериментах путем передачи координат и скоростей с одного компьютера на другой в качестве начальных данных на заданный момент времени с дальнейшим выделением стохастических частиц. Устойчивость траектории этим способом устанавливается для реальных физических задач с произвольным числом частиц.

Таким образом, в работе предложен практический метод исследования неустойчивости на основе определения разбегающихся стохастических траекторий (РСТ-метод). Он позволяет установить: пространственные и временные границы для неустойчивости, усредненные для всех частиц инкременты и инкременты для отдельных пространственных групп, включая одиночную частицу. С его помощью находят средние макроскопические функции в системе на момент развития неустойчивости. Им можно исследовать условия “перехода к стохастичности” без ограничений, присущих известным критериям в системах с двумя степенями свободы [12]. Так как движение частиц в самосогласованном гравитационном поле центрального тела с вращением совпадает с точностью до преобразований с движением в электромагнитных полях [13], то описанный подход может быть применен и к изучению неустойчивостей в электродинамике. Представляет интерес использовать его для изучения гипотезы о возможной транзиентной природе спиральных структур в галактических дисках [14]. Важно установить, действительно ли звездные спирали могут появляться в быстрой последовательности частных эволюционных циклов, каждый из которых включает в себя развитие неустойчивости с последующей диссипацией за счет межзвездного газа. Другим важным примером является изучение механизмов самоподдержания звездных дисков реальных галактик, находящихся в квазистационарном равновесном состоянии с медленной динамической эволюцией [15]. При моделировании сугубо неустойчивых структур – протопланетных дисков – метод поможет найти обобщен-

ные параметры процессов формирования в них газопылевых сгущений [16].

Авторы выражают признательность В. Н. Пармону за поддержку работы, А. В. Снытникову за создание параллельной версии программы и Э. А. Кукшевой за помощь в проведении расчетов и визуализации результатов. Работа поддержана интеграционным проектом СО РАН № 148, 2003 г., Программой Президиума РАН “4. Нестационарные процессы в астрономии” и “6.6 Проблемы зарождения биосферы Земли и ее эволюция”, 2003 г., грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 02-01-00864, а также проектом СО РАН “Супер ЭВМ”, 2003 г.

1. В. Л. Поляченко, Ф. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, М.: Наука, 1976.
2. Р. Хокни, Дж. Иствуд, *Численное моделирование методом частиц*, М.: Мир, 1987.
3. Yu. N. Grigorjev, M. P. Fedoruk, and V. A. Vshivkov, *Numerical “Particle-in-Cell” Methods*, VSP, Utrecht-Boston, 2002, p. 249.
4. В. А. Вшивков, Э. А. Кукшева, С. А. Никитин и др., *Автометрия* **39** (принято в печать в 2003).
5. П. Роуч, *Вычислительная гидродинамика*, М.: Мир, 1980.
6. Ю. А. Березин, В. А. Вшивков, *Метод частиц в динамике разреженной плазмы*, Новосибирск: Наука, 1980.
7. В. Н. Снытников, Диссертация на соиск. степ. канд. физ.-мат. наук, Новосибирск, 1990.
8. В. А. Вшивков, Диссертация на соиск. степ. доктора физ.-мат. наук, Новосибирск, 1996.
9. В. А. Вшивков, В. Н. Снытников, *ЖВМиМФ* **38**, 1877 (1998).
10. В. Н. Снытников, В. Н. Пармон, В. А. Вшивков и др., *Вычислительные технологии* **7**, 72 (2002).
11. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников, *Слабый хаос и квазирегулярные структуры*, М.: Наука, 1991.
12. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, М.: Мир, 1984.
13. A. M. Fridman and N. N. Gor'kavyi, *Physics of Planetary Rings-Celestial Mechanics of Continuous Media*, New York: Springer, 1999.
14. J. A. Sellwood, *Rutgers Astrophysics Preprint* **256** (1999).
15. А. В. Хоперсков, А. В. Засов, Н. В. Тюрина, *Астрономический вестник* (принято в печать в 2002).
16. V. N. Snytnikov, G. I. Dudnikova, J. T. Gleaves et al., *Advances in Space Research* **30**, 1461 (2002).