Письма в ЖЭТФ, том 28, вып.10, стр. 629 – 632 *20 ноября 1978 г.*

N-СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА

А.Е.Боровик

Методом Марченко найден новый класс частных решений N-солитонного типа нелинейного уравнения Ландау – Лифшица, описывающего динамику анизотропной ферромагнитной среды с учетом магнитодипольного взаимодействия.

1.Нелинейная динамика ферромагнетика с одноосной анизотропией описывается уравнением Ландау – Лифшица (Л – Л) [1]

$$\vec{\mu}_t = \vec{\mu} \times \vec{\mu}_{xx} + \beta (\vec{\mu} \times \mathbf{n})(\vec{\mu}\mathbf{n})^{1)}, \tag{1}$$

где $\vec{\mu}$ – единичный вектор в направлении вектора плотности магнитного момента среды, $\mathbf{n}$ – постоянный единичный вектор вдоль оси анизотропии, β – константа анизотропного взаимодействия в кристалле. Так как нами в настоящем сообщении рассматривается простейшая геометрия движений в среде (волна распространяется вдоль оси анизотропии) учет магнитодипольного взаимодействия приводит просто к перенормировке константы β.

Впервые нелинейные свойства магнитоупорядоченной среды исследовались в работе [2], в которой были найдены решения уравнения (1) типа "уединенных" волн – магнитные солитоны. В работе [3], посвященной изложению результатов численного эксперимента по исследованию взаимодействия магнитных солитонов, было показано, что уравнение (1) имеет также двухсолитонное решение. Последний факт, солитоны проходят друг сквозь друга, оставаясь в асимптотике по времени неизменными по форме и амплитуде, является классическим аргументом в пользу того, что уравнение Л – Л принадлежит к классу полностью интегрируемых уравнений эволюции [2)].

[1)] Всюду в дальнейшем мы под индексом внизу будем понимать соответствующую частную производную.

[2)] Недавно в работах [4,5] было показано, что уравнение нелинейной динамики изотропной модели Гайзенберга, $\vec{\mu}_t = \vec{\mu} \times \vec{\mu}_{xx}$ является полностью интегрируемым. В [5] получены двухсолитонные решения и указано на существование N-солитонных решений. Уравнение (1), однако, существенно отличается от вышеуказанного. Необходимо отметить, что уравнение (1) является более точной моделью физических процессов, происходящих в ферромагнетиках, так как в нем учтены и анизотропное и магнитодипольные взаимодействия.

2. Рассмотрим следующую пару операторов:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - \begin{pmatrix} 0; & \lambda\mu^3 & -\lambda\mu^2 \\ -\lambda\mu^3; \ 0; & 0; & \lambda\mu^1 \\ (\lambda+\beta/\lambda)\mu^2; & -(\lambda+\beta/\lambda)\mu^1; & 0 \end{pmatrix} . \qquad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - \begin{pmatrix} 0 & (\lambda^2+\beta)\mu^3 + \lambda\nu^3 & -\lambda^2\mu^2 - \lambda\nu^2 \\ -\lambda^2\mu^3 - \lambda\nu^3 - \beta\mu^3 & 0 & \lambda^2\mu^1 + \lambda\nu^1 \\ (\lambda^2+\beta)\mu^2 + (\lambda+\beta/\lambda)\nu^2; & -(\lambda^2+\beta)\mu^1 - (\lambda+\beta/\lambda)\nu^1; & 0 \end{pmatrix}$$

где λ – параметр не зависящий от координат и времени. Операторы (2) и (2') коммутируют друг с другом, если вектор $\vec{\mu}$ удовлетворяет исследуемому нами уравнению (1), а вектор $\vec{\nu} = \vec{\mu} \times \vec{\mu}_x$[1].

Операторы (2, 2') играют столь же существенную роль при исследовании исходного нелинейного уравнения (1), что и пара Лакса в методе обратной задачи рассеяния [6]. В этой работе, однако, следуя методу Марченко [7], мы будем искать у порождаемой этими операторами системы уравнений

$$L^{ik} y^k = 0; \quad A^{ik} y^k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3) \qquad (3)$$

совместное решение в виде полиномов по λ

$$g^* = f = y^1 + i y^2 = \sum_{i=1}^{N} f^i (\lambda)^i ; \quad h = y^3 = \sum_{i=0}^{N} h^i (\lambda)^i .$$

При этом мы получим некоторый набор алгебраических и дифференциальных уравнений для полиномиальных коэффициентов f^i, g^i, h^i – функций координат и времени. Оказывается, что

$$f^N = (g^N)^* = \mu^1 + i\mu^2 ; \ h^N = \mu^3 . \qquad (4)$$

Воспользовавшись (4), мы замыкаем систему уравнений для полиномиальных коэффициентов. Полученная при этом автономная система дифференциальных уравнений для полиномиальных коэффициентов совместна, так как для нее тождественно выполняется условие Фробениуса, $f^i_{xt} = f^i_{tx}$; $h^i_{xt} = h^i_{tx}$. Следовательно, система уравнений (3) действительно имеет решение, полиномиально зависящее от λ, причем непосредственная проверка показывает, что каждое полиномиальное решение этой системы, определяет нам по формулам (4) некоторое решение уравнений Л – Л (1). Удобно вместо исследования уравнений для полиномиальных коэффициентов, исследовать уравнения движения нулей z^i, $\bar{z}^i$

[1] Изложению метода нахождения оператора (2, 2') ассоциированных с уравнением Л – Л (1) будет посвящено отдельное сообщение.

полиномов f, g, соответственно

$$z^k_x = i \frac{z^k h(z^k)}{\prod\limits_{l \neq k} (z^k z^l)}$$

$$z^k_t = -i \frac{z^k h(z^k)}{\prod\limits_{l \neq k} (z^k z^e)} (\Sigma z^l - z^k + \frac{1}{2} K) \tag{5'}$$

где K – сумма нулей, вообще говоря, рациональной функции по λ,

$$P(\lambda) = \lambda^2 (\lambda^2 + \beta)^{-1} h^2 + fg, \tag{6}$$

не зависящей от координат и времени.

В свою очередь решение уравнения (1) определяется через z^i, $\bar{z}^i$,

$$(\operatorname{arc\,th}(\mu^3))_x = (1/2i) \sum_k (\bar{z}^k - z^k) \tag{7}$$

$$(\operatorname{arcth}(\mu^3))_t = (-1/2i) \{ \sum_{l > k} (\bar{z}^k z^l - z^k z^l) - \frac{1}{2} K \sum_k (\bar{z}^k z^k). \tag{7'}$$

Хотя нелинейные, но обыкновенные дифференциальные уравнения для нулей (5), (5') сложны, имеются стандартные замены, которые приводят к их решению, и вся трудность, в принципе, состоит в обращении этих замен.

3. Среди частных решений уравнения (1), которые порождаются полиномиальными решениями для псевдопотенциальной функции γ^k наиболее интересными являются решения N-солитонного типа, которым соответствуют такие полиномы f, g, h, что функция $P(\lambda)$ имеет только кратные корни. При этом оказывается, что возникают существенно разные случаи, соответствующие различным знакам анизотропии (знак β соответствует физически разным объектам: $\beta > 0$ ($\beta < 0$) – ферромагнетик с анизотропией типа "легкая ось" (легкая плоскость)).

Из-за недостатка места мы ограничимся случаем $\beta > 0$.

А) Если $P(\lambda)$ имеет два вырожденных корня, мы получаем уже найденное ранее [2] односолитонное решение,[1)]

$$\mu^3 = \frac{4\beta - v^2}{2\beta + \sqrt{\beta} v \operatorname{ch}\{(4\beta - v^2)(x - vt)\}}. \tag{8}$$

[1)] Решение (8) соответствует определенному выбору констант интегрирования. При другом выборе мы прийдем к односолитонным решениям, полученным в работе [8]. Зависимость вида решений от выбора констант интегрирования, по-видимому, означает, что существует какое-то преобразование, переводящее решение уравнения с одним значением β в решение уравнения с другим значением β, и в частности в решение уравнения с $\beta = 0$, которое как указывалось выше можно решить методом обратной задачи рассеяния.

Б) К двухсолитонному решению уравнения (1) приводит $P(\lambda)$ с четырьмя вырожденными корнями. Асимптотическое поведение этого решения является стандартным для двухсолитонного решения: при $t \to -\infty$ решение представляет собой два бесконечно удаленных друг от друга солитона, движущихся с разными скоростями v_1, v_2, так что расстояние между ними сокращается, при $t \to \infty$ решение снова представляет собой два бесконечно удаленных друг от друга солитона, движущихся с теми же скоростями (и, следовательно, имеющими ту же амплитуду, что и до взаимодействия), но расстояние между ними увеличивается. Начальная фаза провзаимодействовавших солитонов меняется на величину

$$\Delta = \ln \frac{8\beta - 2v_1v_2 + 2\sqrt{(4\beta - v_1^2)(4\beta - v_2^2)}}{8\beta - 2v_1v_2 - 2\sqrt{(4\beta - v_1^2)(4\beta - v_2^2)}} . \tag{9}$$

В) Хотя увеличение степени полиномов f, g, h сильно усложняет уравнения движения нулей (5), (5′), замена переменных, с помощью которой удалось найти двухсолитонное решение, легко обобщается. В результате функция $P(\lambda)$, имеющая $2N$ вырожденных корня будет приводить нас к N-солитонному решению, которое будет приведено в более пространном сообщении.

4. В заключение автор пользуется возможностью выразить глубокую благодарность профессору В.А.Марченко за постоянный интерес к работе, за ценные советы и замечания, а также Е.Н.Братусь, В.А.Козелу, В.П.Котлярову, К.В.Маслову, В.Н.Робуку, А.А.Слуцкину, Е.Я.Хруслову за полезные дискуссии при обсуждении результатов работы.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
4 октября 1978 г.

Литература

[1] Л.Д.Ландау. Сб. трудов, М., изд. Наука, 1, 128, 1969.

[2] И.А.Ахиезер, А.Е.Боровик. ЖЭТФ, 52, 508, 1967.

[3] А.Е.Боровик, К.В.Маслов. ФНТ, 4, 197, 1978.

[4] M.Lakshmanan. Phys. Lett., 61A, 53, 1977.

[5] L.A.Takhtajah. Phys. Lett., 64A, 235, 1977.

[6] P.D.Lax. Communications on Pure and Applied Mathematics, 21, 467, 1968.

[7] В.А.Марченко. Операторы Штурм-Лиувилля и их приложения. Киев, изд. "Наукова думка", 1977.

[8] Б.А.Иванов, А.С.Ковалев, А.М.Косевич. ФНТ, 3, 906, 1977.