Письма в ЖЭТФ, том 32, вып.9, стр. 579 – 583 5 ноября 1980 г.

О ВНУТРЕННЕМ СТРОЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗВЕЗД

Л.С.Соловьев, Т.Д.Кузнецова

Получено общее точное решение для равновесных сферически симметричных конфигураций в рамках общей теории относительности. Приведены графики зависимости гравитационной и тепловой энергий от радиуса звезды. Обсуждается вопрос о светимости звезд главной последовательности.

Рассматриваются сферически симметричные равновесные конфигурации в рамках общей теории относительности А.Эйнштейна [1].

1. Уравнения движения и энергетические соотношения.

В случае сферической симметрии, когда метрика пространства-времени определяется выражением $ds^2 = c^2dt^2 - a^2dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$, уравнения движения представляются в виде [2]

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{2a'}{ra} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \kappa\left(\frac{\rho W}{\Gamma^2} - p\right), \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{2c'}{rc} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = \kappa\left(\frac{\rho W V^2}{\Gamma^2} + p\right),$$

$$\frac{1}{ac}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\dot a}{c} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{c''}{c} - \frac{c'a'}{ca} + \frac{c'}{rc} - \frac{a'}{ra}\right) = -\kappa p, \quad \frac{2\dot a}{ra^2} = -\kappa\frac{\rho W c V}{\Gamma^2}, \tag{1}$$

где штрихом и точкой обозначены частные производные по r и t, $W = 1 + \epsilon + p/\rho$, $\Gamma = \sqrt{1 - V^2}$, $V = a\dot r / c$, ρ и p — плотность и давление в системе покоя, ϵ — внутренняя энергия на единицу массы покоя, скорость света $c \to 1$, при $r \to \infty$. Уравнения (1) составляют систему 4-х уравнений для 5 неизвестных функций c, a, ρ, p, V. Вводя энтропию S, согласно термодинамическому тождеству $TdS = dW - dp/\rho$, в качестве следствий (1) получим:

$$\frac{1}{r^2}(r^2G')' = \frac{\kappa}{2}\rho^*, \quad \frac{\partial\rho^*}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho^* + p)\,\mathrm{v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{a\rho}{\Gamma} + \mathrm{div}\frac{a\rho}{\Gamma}\mathrm{v} + \frac{a\rho T}{\Gamma W}\frac{dS}{dt} = 0, \tag{2}$$

где

$$G' = \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right), \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \dot r\frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathrm{div}\,a\mathrm{v} \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 a\dot r, \quad \rho^* \equiv \frac{\rho W}{\Gamma^2} - p.$$

Первое уравнение (2) определяет гравитационный потенциал G и полную плотность энергии ρ^*, второе описывает закон сохранения полной энергии, а третье — массы-энтропии. Последнее уравнение имеет место и в случае произвольной метрики $ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$, когда оно записывается в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}\,\rho u^i + \frac{\rho T}{W}u^i\frac{\partial S}{\partial x^i} = 0, \text{ где } u^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad g = |g_{ik}|.$$

При известном производстве энергии q за счет сгорания массы покоя, это уравнение разбивается на два $\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}\,\rho u^i = q$, $\frac{\rho T}{W} u^i \frac{dS}{dx^i} = -q$,

и мы приходим к полной системе уравнений.

Полная энергия звезды M, воспринимаемая внешним наблюдателем по ее гравитационному полю, и энергия, заключенная в массе покоя M_o соответственно равны

$$M = 4\pi\int_o^R \rho^* r^2\,dr, \quad M_o = 4\pi\int_o^R \frac{a\rho}{\Gamma} r^2\,dr. \tag{3}$$

Энергия M представляется суммой $M = M_o + M_G + M_T + M_K$, где гравитационная M_G, тепловая M_T и кинетическая M_K энергии определяются выражениями

$$M_G = 4\pi\int_o^R \rho^*(1-a)r^2 dr, \quad M_T = 4\pi\int_o^R a\left(\frac{\rho\epsilon + p}{\Gamma^2} - p\right) r^2 dr,$$

$$M_K = 4\pi\int_o^R \frac{a\rho}{\Gamma}\left(\frac{1}{\Gamma} - 1\right) r^2\,dr. \tag{4}$$

Излучение энергии звездой очевидно сопровождается уменьшением ее массы M. Изменение M может происходить как за счет выделения (или поглощения) энергии в ядерных и химических реакциях, описываемого изменением M_o, так и вследствие изменения парциальных энергий M_G, M_T и M_K.

Внешнее гравитационное поле описывается решением Шварцшильда [2]

$$c^2 = 1 - r_g/r, \quad a^2 = (1 - r_g/r)^{-1}, \qquad r_g \equiv \kappa M/4\pi. \tag{5}$$

2. Равновесные конфигурации.

При $V \to 0$ уравнения (1) сводятся к системе трех уравнений для четырех неизвестных функций c, a, p и $\rho^* = \rho\epsilon + p$. Гравитационная и тепловая энергии равновесных конфигураций выражаются интегралами

$$\frac{M_G}{M} = \frac{\kappa}{r_g}\int_o^R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\mu}}\right)\rho^* r^2 dr, \qquad \frac{M_T}{M} = \frac{\kappa}{r_g}\int_o^R \frac{\rho\epsilon\, r^2\,dr}{\sqrt{1-\mu}}, \tag{6}$$

где $\mu = 1 - 1/a^2 = 2rG' = \kappa m/4\pi r$, $m = 4\pi\int_o^r \rho^* r^2 dr$ — текущая масса.

а) Если в качестве дополнительного уравнения задать $\rho^* = \text{const}$, то получим внутреннее решение Шварцшильда

$$\frac{1 + 3p/\rho^*}{1 + p/\rho^*} = \sqrt{\frac{1 - r_g r^2}{1 - r_g}}, \quad a^2 = \frac{1}{1 - r_g r^2}, \quad c^2 = \frac{1 - r_g}{(1 + p/\rho^*)^2}, \tag{7}$$

удовлетворяющее граничному условию $p = 0$ при $r = R = 1$. Однако это решение имеет разрыв ρ при $r = R$. Аналогичными недостатками, а также наличием бесконечностей при $r = 0$, обладают и модельные решения Толмена [3].

Для решения (7) можно получить явные выражения для M_G и M_T:

$$\frac{M_G}{M} = 1 - \frac{3}{2}\,\frac{\phi - ks}{s^{3/2}}, \quad \frac{M_T}{M} = \frac{3}{\gamma - 1}\,\frac{k}{s^2}\left(\frac{5}{2} + \frac{12k^2 - 1}{2ks}\phi - \frac{4}{s}\sqrt{9k^2 - 1}\,\times\right.$$

$$\left.\times\ \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{3k+1}{3k-1}\,\frac{1-k}{1+k}}\right). \qquad (8)$$

Здесь $s \equiv \sin\phi = \sqrt{r_g}$, $k \equiv \cos\phi > 1/3$ и принято $\rho\epsilon = p/(\gamma - 1)$.

б) При заданной зависимости $p = p(\rho)$ задача сводится к решению системы уравнений

$$\rho' = -r\,\frac{p + \rho^*}{2}\,\frac{\kappa p + \mu/r^2}{1 - \mu}, \quad (\mu r)' = \kappa\rho^* r^2, \qquad (9)$$

причем в случае релятивистского вырождения $\rho^* = \rho + 3p$, $\rho = \rho_0 (T/T_0)^3$, $p = p_0 (T/T_0)^4$, $\gamma = 4/3$.

в) Общее решение, зависящее от одной произвольной функции, можно получить считая заданной функцию $c(x)$, где $x = r^2$. При этом задача о равновесии сводится к линейному уравнению для $\mu = 1 - 1/a^2$,

$$\mu' + \frac{4xc'' - c/x}{c + 2xc'}\mu = \frac{4xc''}{c + 2xc'}, \qquad (10)$$

решение которого представляется в виде

$$\mu = e^y\left[\mu(R^2) + 4\int_{R^2}^{r^2}\frac{e^y c'' x\,dx}{c + 2xc'}\right] \quad y = \int_{R^2}^{x}\frac{4xc'' - c}{c + 2xc'}\,\frac{dx}{x}, \qquad (11)$$

где $\mu(R^2) = r_g/R$. Требование непрерывности c и c' при сшивании с внешним решением (5) приводит к условию $p(R^2) = 0$, а непрерывность c'' – к $\rho^*(R^2) = 0$. При известных c и $a = 1/\sqrt{1 - \mu}$, величины p и ρ^* определяются формулами

$$\kappa p = \frac{4c'}{c}(1 - \mu) - \frac{\mu}{x}, \quad \kappa\rho^* = \frac{8xcc''}{(xc^2)'}(1 - \mu) + \left[1 + \frac{2c^2}{(xc^2)'}\right]\frac{\mu}{x}.$$

$$(12)$$

Если задать $c^2(x)$ в виде отношения линейных функций и потребовать удовлетворения граничных условий непрерывности c, c' и c'' при $r = R = 1$, то получим частное решение $c^2 = 1 - r_g\dfrac{3 + x}{1 + 3x}$, зависящее только от параметра r_g:

$$\mu = \frac{3h^2 x}{1 - n^2 z^2}\left[z^2 + \frac{1 - n^2 z}{1 - n^2 z^2}\left(\frac{1 - nz}{1 + nz}\right)^n\left(\Delta + F\right)\right], \quad F = 2\int_{1/4}^{z}\left(\frac{1 + nz}{1 - nz}\right)^n z\,dz, \qquad (13)$$

где $z = (1 + 3x)^{-1}$, $\Delta = \dfrac{2 - r_g}{32}\left(\dfrac{4 + n}{4 - n}\right)^n$, $n^2 = \dfrac{8 r_g}{3 - r_g}$. Это выражение теряет смысл при $r_g > 1/3$, когда $c(0) \to 0$. Интеграл $F(z)$ легко вычислить приближенно при $r_g \ll 1$ и $(1/3 - r_g) \ll 1$, а при $r_g = 1/11$ он выражается элементарными функциями.

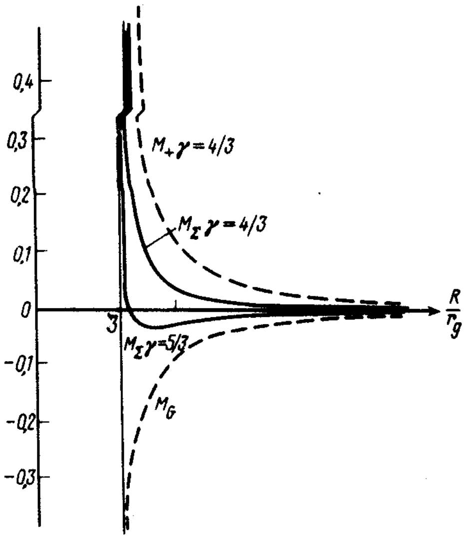

Рис. 1.

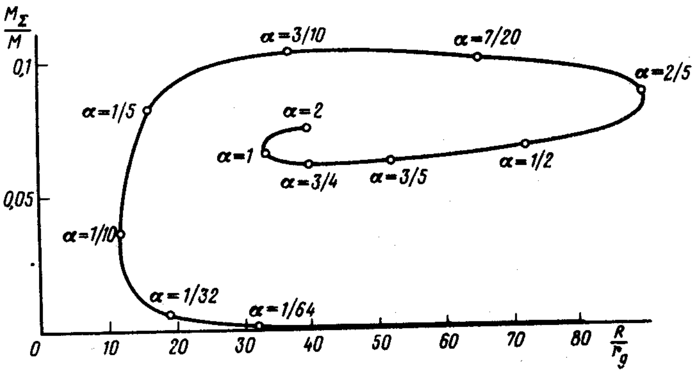

Рис. 2.

На рис. 1 представлены зависимости M_G, M_T и $M_\Sigma = M_G + M_T$ от R/r_g для равновесной конфигурации (13) при $\rho\epsilon = p/(\gamma - 1)$, $\gamma = 4/3$ и $\gamma = 5/3$. Граничное значение R/r_g определяется условием $c(0) \to 0$, дальнейшему уменьшению R/r_g препятствует бесконечный энергетический барьер. На рис. 2 изображен график $M_\Sigma(R/r_g)$, построенный с помощью численного интегрирования уравнений (9) для $\gamma = 4/3$. Неоднозначность обусловлена учетом давления излучения, приводящим к появлению дополнительного параметра $\alpha = p_0/\rho_0$. При малых r_g/R функция M_Σ была получена Фаулером [4]. Характерной особенностью поведения энергии M_Σ является ее рост при уменьшении R, который должен приводить к большому выделению энергии покоя M_0.

3. О светимости звезд.

Для определения светимости $L = \pi R^2 \sigma T_1^4$ необходимо знать эффективную температуру T_1, которая, по-видимому, определяется оптической толщей атмосферы звезды, совпадающей по порядку величины с барометрической длиной $l = kT_1 / m_A g$, $g = GM/R^2$, G — ньютоновская постоянная. Отсюда коэффициент непрозрачности атмосферы $\kappa_A = GM / p_1 R^2$. Ограничимся далее нерелятивистскими эмденовскими [5] равновесиями $p = p_o (\rho / \rho_o)^{\gamma_o}$, $\gamma_o = \mathrm{const}$, которые обладают постоянным запасом конвективной устойчивости, если $\gamma_o < \gamma$, причем $\rho_o \sim M/R^3$, $T_o \sim M/R$.

Пусть $\kappa_A \sim \rho^\nu / T^\lambda$, $\nu = \mathrm{const}$, $\lambda = \mathrm{const}$, тогда из условий равновесия $T_1 \sim M^{a/c} / R^{b/c}$, где $a = \dfrac{\nu + 1}{\gamma_o - 1} - \nu$, $b = \dfrac{\nu + 1}{\gamma_o - 1} - 3\nu - 1$,

$c = \dfrac{\nu + 1}{\gamma_o - 1} - \lambda + 1$. Потребуем теперь, чтобы светимость L зависела

только от массы M и не зависела от радиуса R, как это имеет место для звезд главной последовательности $L \sim M^N$. Тогда параметры γ_o и N выразятся через ν и λ: $\gamma_o = 1 + \dfrac{1 + \nu}{3 + 6\nu - \lambda}$, $N = 2\, \dfrac{3 + 5\nu - \lambda}{2 + 3\nu - \lambda}$.

Если использовать апроксимационную формулу $\kappa_A \sim (\rho / T^{3,5})^a$, то для $a = 0$; $0,5$; 1 получим соответственно $\gamma_o = 1,33$; $1,35$; $1,36$, $N = 3$; $4,3$; 6. Отсюда следует, что светимость звезд главной последовательности хорошо описывается эмденовской равновесной конфигурацией с $\gamma_o \approx 1,34$, не содержащей никаких параметров, кроме M и R. Заметим, что эмденовское равновесие с $\gamma_o = 4/3$, предложенное Эддингтоном исходя из других предпосылок, долго рассматривалось в качестве стандартного для звезд типа Солнца.

Поступила в редакцию
22 июня 1980 г.

Литература

[1] A.Einstein. Ann. d. Phys., **49**, 769, 1916.

[2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., изд. Наука, 1973.

[3] R.C.Tolman. Proc. Nat. Acad. Sci, USA, **20**, 3, 1934.

[4] W.A.Fowler. Rev. Mod. Phys., **36**, 545, 1104, 1964.

[5] Я.Б.Зельдович, Н.Д.Новиков. Теория тяготения и эволюция звезд. М., изд. Наука, 1971.