Письма в ЖЭТФ, том 28, вып. 8, стр. 560 – 564 *20 октября 1978 г.*

ТРЕХМЕРНАЯ САМОЛОКАЛИЗАЦИЯ ГЕЛИКОНОВ

Д.Г.Ломинадзе, Г.З.Мачабели, В.И.Петвиашвили, Г.Д.Чагелишвили

Получено нелинейное трехмерное уравнение Шредингера, описывающее эволюцию амплитуды геликонного пакета, распространяющегося вдоль постоянного магнитного поля. Показано, что дисперсия и нелинейные эффекты приводят к трехмерной локализации геликонов.

Геликоны – электромагнитные колебания плазмы в диапазоне частот $\omega_{Bi} << \omega << \omega_{Be}, \omega_{Pe}$ – часто наблюдаются в виде помех к радиосигналам [1]. Эти помехи имеют часто повторяющуюся форму, что указывает на тенденцию геликонов к самолокализации и образованию стационарных пакетов-солитонов. Раскачка геликонов в плазме легко происходит пучками энергичных электронов, распространяющихся вдоль или поперек магнитного поля [2], поэтому такие же волны могли бы раскачаться и в лабораторной плазме, в том числе и в установках для термоядерных исследований. Способность к самолокализации — важное свойство, так как вследствие него оказывается возможным накопление большого количества волновой энергии, даже когда область неустойчивости и инкремент малы.

Будем считать, что пакет геликонов имеет основное волновое число k_o, направленное вдоль постоянного магнитного поля ($\mathbf{k}_o \parallel \mathbf{B}_o \parallel \mathbf{z}$), которое по величине много больше ширины пакета в пространстве волновых чисел. Мы рассматриваем пакеты волн, имеющие достаточно малый размер по всем направлениям в координатном пространстве. Поэтому распадом геликонной волны на две геликонные с более низкой частотой можно пренебречь, так как групповые скорости этих волн различны и в трехмерном пакете они не могут достаточно долго взаимодействовать друг с другом. Основной нелинейный эффект в нашем случае — это действие ВЧ давления пакета на плазму, приводящее к образованию ям плотности и магнитного поля в области локализации пакета и движущиеся вместе с пакетом. Как будет видно из дальнейшего, эти ямы задерживают расплывание пакета. Для нахождения параметров этих ям, воспользуемся уравнениями МГД, усредненными по основной частоте пакета.

Предполагая, что в системе имеются два типа движения: высокочастотные и низкочастотные, представим магнитное поле, плотность и скорость частиц в следующем виде:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_o + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2; \quad n = n_o + n_1 + n_2; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \tag{1}$$

где $\mathbf{B}_1$, n_1, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{B}_2$, n_2, $\mathbf{v}_2$ — высокочастотные и низкочастотные возмущения соответственно.

После подстановки представления (1) в уравнениях магнитной гидродинамики и усреднения по основной частоте пакета получим:

$$m_i n_o \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} + \frac{B_o}{4\pi} \nabla B_{2z} - \frac{B_o}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial z} = - m_i n_o < (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 > -$$

$$- \nabla < \frac{B_1^2}{8\pi} > + \frac{1}{4\pi} < (\mathbf{B}_1 \nabla) \mathbf{B}_1 > \equiv < \mathbf{C} >, \tag{2}$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} + n_o \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = - < \operatorname{div} n_1 \mathbf{v}_1 > \equiv < \psi >, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} + \mathbf{B}_o \operatorname{div} \mathbf{v}_2 - B_o \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial z} = - < \mathbf{B}_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 > + < (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 > -$$

$$- < (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{B}_1 > \equiv < \mathbf{D} > . \tag{4}$$

Здесь $< ... >$ – означает усреднение по быстрым осцилляциям, $< \mathbf{C} >$ $< \psi >$, $< \mathbf{D} >$ – вклады высокочастотных величин в соответствующих низкочастотных уравнениях. Комбинируя z составляющие уравнений (2) и (4), можно получить выражение для $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v}_2$. Затем, беря производную по времени уравнения (4) и подставляя в нем выражение для $\frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathbf{v}_2$, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{n_2}{n_0} - \frac{B_{2z}}{B_0}\right) = -\frac{1}{m_i n_0} \cdot \frac{\partial < C_z >}{\partial z} - \frac{1}{B_0} \frac{\partial < D_z >}{\partial t} + \frac{\partial < \psi >}{\partial t} . \quad (5)$$

Уравнение для высокочастотных колебаний магнитного поля, получается из дисперсионного соотношения геликонов:

$$\omega = \frac{c^2 \omega_{Be}}{\omega_{Pe}^2} k k_z \approx \frac{c^2 \omega_{Be}}{\omega_{Pe}^2} (k_z^2 + \tfrac{1}{2} k_\perp^2); \quad k_\perp^2 << k_z^2 . \quad (6)$$

Оно имеет вид

$$i \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} + \frac{c^2 \omega_{Be}}{\omega_{Pe}^2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{B}_1}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \Delta_\perp \mathbf{B}_1\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\left(\frac{B_{2z}}{B_0} - \frac{n_2}{n_0}\right) \dot{\mathbf{B}}_1\right\} = 0 , \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем используются общепринятые обозначения. Выделим из B_1 основное число, т. е. представим его в виде

$$\mathbf{B}_1 = \sqrt{\frac{4\omega_0}{\omega_{Bi}}} B_0 \left\{\mathbf{b} \exp(ik_0 z - i\omega_0 t) + \text{к.с.}\right\} ; \quad \omega_0 = \frac{c^2 \omega_{Be}}{\omega_{Pe}^2} k_0^2 \quad (8)$$

Здесь ω_0 – основная частота пакета, $\mathbf{b}$ – безразмерная амплитуда, слабо зависящая от z, $r_\perp$, t.

Учитывая представление (8) и что в линейном приближении в геликоне, распространяющемся вдоль магнитного поля, выполняются условия

$$n_1 = 0; \quad v_{1z} = 0; \quad B_{1z} = 0$$

в правой части уравнения (5) двумя последними членами можно пренебречь, а $< C_z >$ примет вид

$$< C_z > = -\frac{B_0^2}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_{Bi}} \frac{\partial |b|^2}{\partial z} . \quad (9)$$

Введя групповую скорость пакета $V_g = 2\dfrac{c^2\omega_{Be}}{\omega_{Pe}^2} k_o$, соответствующую волновому числу k_o, можно положить, что все численно меняющиеся величины от координат и времени зависят следующим образом:

$$b = b(z - V_g t, r_\perp, t) = b(\xi, r_\perp, t), \qquad (10)$$

где зависимость от последнего аргумента гораздо слабее зависимости от времени, входящего в первый аргумент. С учетом (9), (10) и вышесказанного, соотношение (5) примет вид

$$\frac{n_2}{n_o} - \frac{B_{2z}}{B_o} = |b|^2. \qquad (11)$$

С учетом (8), (10), (11), из (7) получим окончательно

$$i\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{c^2\omega_{Be}}{\omega_{Pe}^2}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\Delta_\perp b\right) + \omega_o |b|^2 b = 0. \qquad (12)$$

Таким образом, мы получили уравнение медленной эволюции амплитуды пакета геликонной волны с несущим волновым числом k_o и несущей частотой ω_o в системе координат движущейся с групповой скоростью волны. Из (12) видно, что эта эволюция происходит из-за дисперсии и высокочастотного давления. (12) представляет собой хорошо известное нелинейное уравнение Шредингера. В [3] было показано, что трехмерные солитонные решения уравнения (12) неустойчивы, но поскольку инкремент этой неустойчивости мал (пропорционален квадрату амплитуды солитона), то геликонная турбулентность будет существовать в основном в виде скопления таких солитонов. Этим и объясняется частая повторяемость в форме геликонных помех ("свистов") в ионосфере. Получим уравнение солитонного решения (12). Для этого положим: $b = Af(\rho) \times \exp(iA^2\tau)$. Здесь ρ, τ, A — безразмерные радиус, время и амплитуда соответственно $\rho = Ak_o\sqrt{\xi^2 + 2r_\perp^2}$; $\tau = \omega_o t$. Для $f(\rho)$ получим

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) = f - f^3. \qquad (13)$$

Это уравнение имеет солитонное решение с амплитудой и характерными размерами порядка единицы. Отсюда получаем связь между параметрами галиконного солитона, который можно было бы проверить на эксперименте. Длительность прохождения солитона порядка

$\left(\dfrac{B_1}{B_o}\sqrt{\dfrac{\omega_{Bi}}{\omega_o}}\,\omega_{Bi}\right)^{-1}$ т. е. обратно пропорциональна амплитуде, деленной на квадратный корень из несущей частоты пакета.

Абастуманская
астрофизическая обсерватория
Академии наук Грузинской ССР

Поступила в редакцию
6 августа 1978 г.

Литература

[1] F.A.McNeill. J. Atmos. and Terr. Phys., 37, 531, 1975.

[2] А.Б.Михайловский. Теория плазменных неустойчивостей, М., Атомиздат, т. 1, 1975.

[3] Н.Г.Вахитов, А.А.Колоколов. Изв. высш. уч. зав., сер. Радиофизика, 16, 1020, 1973.