Письма в ЖЭТФ, том 25, вып. 6, стр. 296 – 299 *20 марта 1977 г.*

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

В.И.Карпман

Получены общие выражения для скорости изменения инвариантов нелинейных волн из-за действия возмущений, в предположении, что при отсутствии последних соответствующие уравнения решаются методом обратной задачи (уравнение Кортевега – де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера и т.д.).

Предположим, что система уравнений для нелинейных волн может быть написана в виде

$$u_t(x,t) = S[u(x,t)] + \epsilon R[u(x,t)], \tag{1}$$

где S и R – нелинейные дифференциальные операторы, действующие на $u(x,t)$ (u, вообще говоря, может быть комплексной величиной и иметь несколько компонент), причем уравнение (1) при $\epsilon = 0$ может быть решено методом обратной задачи (см. [1 – 3], а также ряд других работ, где этот метод применяется к различным уравнениям). Тогда, как известно [4, 3], при $\epsilon = 0$ существует бесконечное число полиномиальных законов сохранения.

$$\partial q_n[u,u^*]/\partial t + \partial p_n[u,u^*]/\partial x = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где q_n и p_n являются полиномами от функций u, u^* и их пространственных производных, так что величины $I_n\{u,u^*\} = \int_{-\infty}^{\infty} q_n dx$ сохраняются, если $u(x,t) \to 0$ при $|x| \to \infty$ (здесь мы ограничимся только такими граничными условиями). Алгоритм вычисления I_n органически вытекает из метода обратной задачи [4, 3]. Если в (1) $\epsilon \neq 0$, то $dI_n/dt = \psi_n\{u,u^*\}$, где ψ_n – некоторые функционалы от u, u^*. В настоящей работе получен общий алгоритм нахождения $\psi_n(u,u^*)$.

Производную по времени от функционала $I_n\{u,u^*\}$ можно написать в виде

$$\frac{dI_n}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \partial x \left[\frac{\delta I_n}{\delta u(x)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\delta I_n}{\delta u^*(x)} \frac{\partial u^*}{\partial t} \right], \tag{3}$$

где $\delta I_n/\delta u(x)$ – функциональная производная в точке x (если u – вещественная величина, то последний член в (3) отсутствует). Подставляя u_t, u_t^* из (1) в (3), получим

$$\frac{dI_n}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\delta I_n}{\delta u(x)} S + \frac{\delta I_n}{\delta u^*(x)} S^* \right] dx +$$

$$+ \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\delta I_n}{\delta u(x)} R + \frac{\delta I_n}{\delta u^*(x)} R^* \right] dx. \tag{4}$$

Выражение под знаком первого интеграла является дивергенцией. В этом можно убедиться непосредственно (с помощью довольно громоздких вычислений). Можно, однако, поступить проще, заметив, что при $\epsilon = 0$ производная dI_n / dt должна быть интегралом от дивергенции. Следовательно, при рассматриваемых граничных условиях

$$\frac{dI_n}{dt} = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\delta I_n}{\delta u(x)} R[u] + \frac{\delta I_n}{\delta u^*(x)} R^*[u] \right\} . \tag{5}$$

Таким образом, если известен алгоритм написания инвариантов для уравнения (1) с $\epsilon = 0$, то (5) дает возможность вычислить dI_n / dt, обусловленное возмущением $\epsilon R[u]$. Соотношения (5) мы будем называть модифицированными законами сохранения.

Если, например, использовать представление $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} q_n dx$, то

$$\frac{\delta I_n}{\delta u(x)} = \frac{\partial q_n}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q_n}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial q_n}{\partial u_{xx}} \right) - \ldots \tag{6}$$

и аналогично для $\delta I_n / \delta u^*$. Часто, однако, более удобно исходить из соотношений, связывающих I_n с коэффициентами Иоста. Поясним это на примере уравнения КдВ, которому отвечает задача на собственные значения

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + [k^2 - u(x,t)]\, \phi = 0. \tag{7}$$

В качестве собственных функций этого уравнения для непрерывного спектра ($k^2 > 0$) можно выбрать функции Иоста с асимптотиками

$$f(x,k) \to e^{ikx} (x \to \infty), \quad g(x,k) \to e^{-ikx} (x \to -\infty),$$

связанные между собой соотношениями

$$g(x,k) = a(k) f^*(x,k) + b(k) f(x,k). \qquad (8)$$

При этом коэффициенты Иоста $a(k)$, $b(k)$ являются, как и I_n, функционалами от u, причем [5],

$$\ln a(k) = -\sum_{n=1}^{\infty} I_n/(2ik)^{2n-1}, \qquad (9)$$

$$\frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} = \frac{i}{2k} f(x,k)\, g(x,k). \qquad (10)$$

Применяя, в частности, эти соотношения к односолитонному состоянию $u = u_s \equiv -2\kappa^2 \mathrm{sech}^2 z$, $z = \kappa(x - \xi)$ и учитывая, что в этом случае $b(k) = 0$, $a(k) = (k - i\kappa)(k + i\kappa)^{-1}$, $f(x,k) = e^{ikx}(k + i\kappa\,\mathrm{th}\, z)(k + i\kappa)^{-1}$, получим

$$\left[\frac{\delta I_n}{\delta u(x)}\right]_{u=u_s} = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2^{2n-2}\kappa^{2n-2}\mathrm{sech}^2 z & (n>1) \end{cases}. \qquad (11)$$

Поступая аналогичным образом для нелинейного уравнения Шредингера, где $S[u] = i(u_{xx}/2 + |u|^2 u)$, $u_s = 2\nu\,\mathrm{sech} z \exp(i\delta)$, $z = 2\nu(x - \xi)$, получим

$$\left[\frac{\delta I_{2m-1}}{\delta u(x)}\right]_{u=u_s} = \left[\frac{\delta I_{2m-1}}{\delta u^*(x)}\right]^*_{u=u_s} = (2\nu)^{2m-1}\,\mathrm{sech}\, z\, e^{-i\delta},$$

$$\left[\frac{\delta I_{2m}}{\delta u(x)}\right]_{u=u_s} = -\left[\frac{\delta I_{2m}}{\delta u^*(x)}\right]^*_{u=u_s} = -(2\nu)^{2m}\frac{\mathrm{th}\, z}{\mathrm{ch}\, z}\, e^{-i\delta}. \qquad (12)$$

Таким же способом можно поступать и для n-солитонных состояний. Соотношения (11), (12) играют важную роль при изучении изменений инвариантов солитона под действием возмущений. Последний вопрос, однако, выходит за рамки настоящей статьи и будет рассмотрен отдельно.

Автор выражает благодарность Е.М.Маслову за полезные обсуждения.

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 февраля 1977 г.

Литература

[1] C.S.Gardner, J.M.Green, M.D.Kruskal, R.M.Miura. Phys. Rev. Lett., 19, 1095, 1967.

[2] P.D.Lax. Comm. Pure Appl. Math., 21, 467, 1968.

[3] В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, 61, 118, 1971.

[4] M.D.Kruskal, R.M.Miura, C.S.Gardner, N.J.Zabuski. J. Math. Phys., 11, 952, 1970.

[5] В.Е.Захаров, Л.Д.Фаддеев. Функциональный анализ и его приложения, 5, 18, 1971.