Письма в ЖЭТФ, том 28, вып.6, стр. 344 – 347 *20 сентября 1978 г.*

ДЕСТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ ВЛИЯНИЕ ШИРА И ПРЕДЕЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ

О.П.Погуце, Э.И.Юрченко

В работе получен аналитический критерий устойчивости плазмы относительно баллонных мод. Он учитывает два новых физических эффекта: дестабилизацию, возникающую из-за пересечения ветвей желобковых колебаний и баллонный эффект, связанный с широм.

В настоящей работе с помощью метода Тэйлора [1] исследуется уравнение малых колебаний, описывающее желобковую неустойчивость и баллонные эффекты. Для реальной геометрии токамака получен новый аналитический критерий устойчивости. Этот критерий показывает, что с увеличением шира устойчивость вначале ухудшается, а затем снова улучшается. Предельные значения β_J (при превышении которых наступает неустойчивость) следующие из этого критерия могут быть меньше единицы.

Теоретически мелкомасштабные желобковые колебания исследовались во многих работах. В [2, 3] было получено выражение для критерия устойчивости желобковых колебаний в токамаке с круговыми магнитными поверхностями. Необходимый критерий устойчивости из работы [3] имеет следующий вид:

$$\frac{1}{4}s^2 + \frac{2p'r}{B_s^2}(1 - q^2) > 0. \qquad (1)$$

В работе [3] было также показано, что выражение (1) следует из общегеометрического критерия Мерсье [4].

Ниже будет показано, что даже когда критерий (1) выполнен плазма может быть неустойчивой.

Для описания желобковой неустойчивости при больших n (n – азимутальное число по большому азимуту тора) мы воспользуемся упрощенным вариационным принципом справедливым в случае сильного продольного магнитного поля [5]. Выбирая согласно [1], электростатический потенциал в виде: $\phi(\rho, \theta) = F(\rho, \theta)e^{inq\theta}$, и заменяя интегрирование $\int_0^{2\pi} d\theta \ldots \to \int_{-\infty}^{+\infty} dy \ldots$, мы получим следующее выражение для потенциальной энергии в пределе $(nq) >> 1$.

$$W_0 = \frac{1}{2}\int_0^a d\rho (nq)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \left\{ \frac{1}{4\pi\sqrt{g}} \left(\frac{B^\omega}{B^s}\right)^2 [g_{11} - 2g_{12}(sy) + g_{22}(sy)^2]\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{g}B^s}\frac{dp}{d\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{B^s} - (sy)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{B^s}\right)(F)^2 \right\}, \quad s = rq'/q, \qquad (2)$$

где выражения для g_{ik}, $\sqrt{g}$ и B^s, B^w приведены в работе [3].

Варьируя (2) по F нетрудно получить уравнение малых колебаний, описывающее желобковую неустойчивость с учетом баллонных эффектов. Это уравнение отличается от соответствующего уравнения из работы [2] тем, что оно написано в системе координат с прямыми силовыми линиями (q – не зависит от y).

Для получения аналитического критерия воспользуемся методом, обобщающим метод усреднения в теории нелинейных колебаний. Для малых s решение уравнения для F можно представить в виде $F = \langle F \rangle + \widetilde{F}$, где $\langle F \rangle$ медленно меняющаяся часть (характерный интервал изменения $y \sim 1/s$), а $\widetilde{F}$ – быстропеременная часть решения (интервал $y \sim 1$).

Для $\widetilde{F}$ можно получить выражение вида

$$\widetilde{F} = \frac{A \cos y + B sy \sin y}{1 + (sy)^2} < F >, \tag{3}$$

где A, B являются функциями g_{11}, g_{12} и т.д. После подстановки (3) в уравнение для F, получаемое варьированием (2), и усреднения последнего по быстрым осцилляциям можно получить уравнение для $<F>$. Такое приближение соответствует методу усреднения, но мы поступим другим образом, а именно подставим решение вида $F = <F> + \widetilde{F}$ прямо в выражение для потенциальной энергии (2). Причем мы можем считать, что $<F> \approx \mathrm{const}$ по y [6]. Из условия $W_0 > 0$ мы сразу получаем *необходимый* локальный критерий устойчивости. Можно показать, что такой метод является гораздо более точным, чем непосредственное решение уравнения для $< F >$ (последнее после ряда упрощений приводит к критерию (1)).

Этот метод является более точным во-первых потому, что мы подставляем в качестве пробной функции функцию мало отличающуюся от точной (функция $F = <F> + \widetilde{F}$, где $\widetilde{F}$ дается выражением (3), получена асимптотическим разложением по s), а как хорошо известно, при этом точность ответа (за счет вариационного принципа) сильно возрастает и во-вторых, таким образом мы (как будет видно ниже) получаем экспоненциальные, неаналитические члены (вида $e^{-1/s}$) принципиально неучитываемые в асимптотическом методе усреднения.

Получающийся критерий для реальной геометрии [3] выглядит следующим образом:

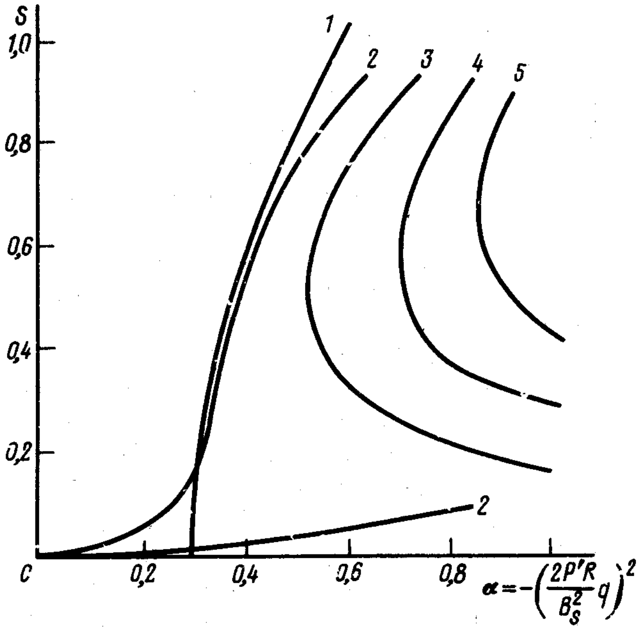
$$\frac{1}{2}s^2 + \frac{2p' r}{B_s^2}\left\{1 - q^2\left[1 - \frac{7}{4\epsilon}\left(1 - \frac{5}{7}s^2\right)e^{-1/|s|}\right]\right\} - 3\frac{sq^4}{\epsilon^2}\left(\frac{p' r}{B_s^2}\right)^2 > 0, \tag{4}$$

где $\epsilon = r/R$.

Этот критерий изображен на рисунке для различных значений ϵ. На этом же рисунке приведены кривые следующие из работы [1]. Область правее кривых – неустойчива. Подчеркнем, еще раз, что при этом критерий (1) считается выполненным, т.е. плазма устойчива по Мерсье.

Используемая нами геометрия токамака в пределе $\epsilon \to 0$ похожа на метрику Тэйлора. Поэтому неудивительно близкое совпадение с его численными результатами,

Из наших кривых ясно следует, что при $s \to 0$ плазма является более устойчивой – это проявление стабилизирующего влияния магнитной ямы. С ростом шира устойчивость *ухудшается* (!). Дестабилизация связана с новыми членами $e^{-1/|s|}$ и $s\,(p' r / B_s^2)^2$. Эффект описываемый экспоненциальным членом – $e^{-1/|s|}$ раньше не учитывался. Он аналогичен эффекту расщепления уровней атомов при сближении их в молекулу. Дестабилизирующий член $s\,(p' r / B_s^2)^2$ характеризует баллонный эффект при спадающем токе. При дальнейшем росте шира опять наступает устойчивость.



1 – Из работы [1]; 2 – $\epsilon = 0$; 3 – $\epsilon = 1/10$; 4 – $\epsilon = 1/5$; 5 – $\epsilon = 1/3$

При $\epsilon = 0$ стабилизация магнитной ямой исчезает (кривая 2) и неустойчивость возможна, начиная с $\alpha = 0$. Из этих кривых следует, что предельное давление плазмы может быть достаточно мало́ $\beta_J \lesssim 1$.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
6 июля 1978 г.

Литература

[1] J.W.Connor, R.J.Hastie, J.B. Taylor. Phys. Rev. Lett., **40**, 396, 1978.

[2] Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце. ДАН СССР, **170**, 811, 1966.

[3] В.Д.Шафранов, Э.И.Юрченко. ЖЭТФ, **53**, 1157, 1967.

[4] C.Mercier. Nuclear Fusion, **1**, 47, 1960.

[5] O.P. Pogutse, E.I.Yurchenko. PPPL-trans-122, 1977; OPNL/tr-4470, 1977.

[6] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, Физматгиз. 1963.