Письма в ЖЭТФ, том 28, вып. 5, стр. 273 – 276 *5 сентября 1978 г.*

ВКЛАД ИНСТАНТОНОВ В КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

И.В.Фролов, А.С.Шварц

Вычислены квантовые флуктуации инстантонов в модели гейзенберговского ферромагнетика.

Теория гейзенберговского ферромагнетика (двумерная нелинейная σ-модель) в некоторых отношениях аналогична теории Янга – Миллса. В частности, в этой теории существуют инстантоны. Эти инстантоны были найдены в [1]; в [2, 3] были вычислены квантовые флуктуации инстантонов с единичным топологическим зарядом. Некоторые частичные результаты о квантовых флуктуациях инстантонов с топологическим зарядом 2 были получены в [3]. В настоящей статье находятся квантовые флуктуации инстантонов с произвольным топологическим зарядом q. Вычисление производится методами, развитыми в статьях [4, 5].

Рассматриваемая теория задается функционалом

$$S = \frac{1}{2f_0} \int (\partial_\mu \mathbf{n})^2 dxdy,$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – поле, заданное в двумерном эвклидовом пространстве и подчиненное условию $|\mathbf{n}| = 1$. (Это функционал имеет смысл энергии гейзенберговского ферромагнетика или эвклидова действия σ-модели). Перейдем к комплексным переменным $z = x + iy$; $w = (n_1 + in_2)(1 + n_3)^{-1}$. В этих переменных

$$S = 2f_0^{-1} \int (1 + |w|^2)^{-2}(|\partial_z w|^2 + |\partial_{\bar z} w|^2)\, idzd\bar z; \qquad (1)$$

$$f_0 S - 4\pi q = 4\int (1 + |w|^2)^{-2} |\partial_{\bar z} w|^2 \, i dz d\bar z, \qquad (2)$$

где $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$; $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Из (2) видно, что минимум S на полях, имеющих топологический заряд $q > 0$, равен $4\pi q f^{-1}$ и достигается на полях вида

$$w = c \prod_{1 \leqslant i \leqslant q} (z - a_i) \prod_{1 \leqslant j \leqslant q} (z - b_j)^{-1} \qquad (3)$$

(инстантонах). Корреляционные функции гейзенберговского ферромагнетика (эвклидовы функции Грина σ-модели) представляются в виде

$$\int \Phi(\mathbf{n}) \exp(-S) \prod d\mathbf{n}(x) \Big/ \int \exp(-S) \prod d\mathbf{n}(x), \qquad (4)$$

где можно считать, например, что $\Phi(\mathbf{n}) = n_{a1}(x_1) \ldots n_{a_k}(x_k)$. Наша задача состоит в нахождении вклада инстантонов с топологическим зарядом q при вычислении методом перевала функциональных интегралов, фигурирующих в (4). При этом вычислении в функционале S оставляются только члены, квадратичные по отклонениям от инстантонов. Нахождение функционального интеграла по направлениям, ортогональным к многообразию инстантонов, сводится к исследованию бесконечномерного детерминанта; это исследование предоставляет основную трудность при изучении инстантонного вклада. Мы покажем, что вклад в (4) инстантонов с топологическим зарядом q дается формулой

$$I_q = f^{-q} \nu^{2q} \exp(-4\pi q f^{-1}) \int \Phi(a, b, c) d\mu,$$

где f — физическая константа связи, ν — точка нормировки,

$$d\mu = \prod_{j<k} |a_j - a_k|^2 \prod_{l<m} |b_l - b_m|^2 \prod_{r,s} |a_r - b_s|^{-2} \times$$

$$\times (1 + |c|^2)^{-2} \prod_p (i da_p d\bar a_p) \prod_t (i db_t d\bar b_t) \, i dc d\bar c$$

$\Phi(a, b, c) = \Phi(a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_q, c)$ получается подстановкой инстантона (3) в $\Phi(\mathbf{n})$, интегрирование ведется по параметрам инстантонов. (Постоянный множитель в выражении для I_q опускаем). Вычисление I_q удобнее проводить, рассматривая поля на сфере радиуса R и устремляя затем R к бесконечности. Прежде всего мы представляем I_q в виде

$$I_q = f^{-2q} \nu^{2q} \exp(-4\pi q f^{-1}) \int \Phi(a, b, c) (\det{}' \Delta)^{-\frac{1}{2}} d\mu_0 .$$

Здесь $d\mu_0$ — мера на многообразии инстантонов, порождаемая естественной римановой метрикой на этом многообразии:

$$d\mu_0 = \det (M_{pt}) \prod_{j<k} |a_j - a_k|^2 \prod_{l<m} |b_l - b_m|^2 \prod_{r,s} |a_r - b_s|^2 \times$$
$$\times |c|^{4q} \prod_j (i da_j d\bar{a}_j) \prod_k (i db_k d\bar{b}_k) i dc\, d\bar{c}, \tag{5}$$

$$M_{pt} = \int \rho^{-2} \bar{z}^p z^t \sqrt{g}\, i dz d\bar{z} \quad (0 \leqslant p,\ t \leqslant 2q),$$

$$\rho = (1 + |w|^2) \prod_j |z - b_j|^2,$$

$$\Delta = \Delta(a, b, c) = \rho^{-1} \partial_{\bar{z}} (g)^{-1/2} \rho^2 \partial_z \rho^{-1}$$

— оператор Лапласа в поле инстантона (3), $g = \det(g_{\mu\nu})$, $g_{\mu\nu}$ — метрика на сфере, $\det'$ обозначает регуляризованный детерминант (расходящаяся часть детерминанта сокращается с перенормировкой константы связи). Найдем далее вариацию $\ln\det'\Delta(a, b, c)$ при изменении параметров инстантона. Воспользуемся тем, что вариация $\mathrm{Sp}\exp(-t\Delta)$ при бесконечно малом изменении инстантонных параметров может быть записана в виде $t\, {}^d/_{dt}\, V(t)$, где

$$V(t) = \mathrm{Sp}\,(\delta\,(\ln\rho)\,(\exp(-t\Delta) - \exp(-t\tilde{\Delta}))),$$

$$\tilde{\Delta} = g^{-1/2} \rho\, \partial_z \rho^{-2} \partial_{\bar{z}} \rho.$$

Отсюда следует, что вариация $\ln\det_\epsilon\Delta = \int_\epsilon^\infty t^{-1}\mathrm{Sp}\exp(-t\Delta)\,dt$ равна $V(\epsilon) - V(\infty)$. Это позволяет представить вариацию $\ln\det'\Delta$ в виде

$$\frac{1}{\pi} \int \delta\,(\ln\rho)\,\partial_{\bar{z}}\partial_z (4\ln\rho - \ln\sqrt{g})\, i dz d\bar{z} + 2\delta\ln\det(M_{jk}) \tag{6}$$

(можно рассматривать $\det_\epsilon\Delta$ как детерминант, обрезанный по собственному времени, $\ln\det'$ представляет собой конечную часть $\ln\det_\epsilon\Delta$ при $\epsilon \to 0$, асимптотика $V(\epsilon)$ при $\epsilon \to 0$ вычисляется квазиклассическим методом, а $V(\infty)$ выражается через нулевые моды $\phi_k = \rho^{-1} z^k$ оператора Δ). Вычисляя интеграл в (6) получаем в случае, когда размеры инстантона малы по сравнению с радиусом сферы R, вариацию $\ln\det'\Delta - 2\ln\det M_{jk}$ в виде

$$4\delta\ \ln(|c|^2 + 1) + 8q\delta\ln|c| + 4\delta\ln\Big(\prod_{j,k} |a_j - b_k|^2\Big).$$

Это позволяет найти $(\det'\Delta)^{-1/2}(\det M_{jk})$ с точностью до постоянного множителя и приводит к указанной выше формуле для инстантонного вклада. В случае, если инстантон можно рассматривать как суперпозицию далеких инстантонов с топологическим зарядом 1 мера, $d\mu$ распадается в произведение множителей, отвечающих этим инстантоном; это дает возможность вычислить оставшийся неопределенным постоянный множитель.

Московский
инженерно- физический институт

Поступила в редакцию
23 июня 1978 г.

Литература

[1] А.А.Белавин, А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 22, 503, 1975.

[2] А.М.Поляков. ЖЭТФ, 68, 1975, 1975.

[3] A.Jevicki. Nucl. Phys., B127, 125, 1977.

[4] A.Schwarz. Lett. Math. Phys., 2, 201, 1978.

[5] I.Frolov, A.Schwarz. Phys. Lett., B (в печати).