Письма в ЖЭТФ, том 28, вып. 5, стр. 298 – 301 *5 сентября 1978 г.*

ДИСПЕРСИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЛАГРАНЖЕВОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕНСИВНОГО ПОЛЯ

С.Л.Лебедев, В.И.Ритус

Найдено спектральное представление для точной лагранжевой функции постоянного электромагнитного поля.

Структура квантовой электродинамики (КЭД) на малых расстояниях определяется обычно поведением пропагатора фотона при больших значениях квадрата импульса [1, 2]. Перенормируемость связывает асимптотические свойства пропагаторов с поведением функции Гелл-Манна-Лоу, сосредоточившей в себе принципиальные свойства КЭД. Благодаря универсальности электромагнитного взаимодействия радиационное взаимодействие электронов посредством квантованного электромагнитного поля может быть введено в КЭД функциональным дифференцированием по внешнему полю амплитуд, учитывающих лишь взаимодействие электронов с внешнем полем, см., например, [3]. Поэтому зависимость квантоэлектродинамических величин от внешнего поля представляет принципиальный интерес. В работах [4 – 6] показано, что точная лагранжева функция электромагнитного поля в области сильного поля содержит такую же информацию о КЭД, что и точный пропагатор фотона при больших значениях квадрата импульса, и определяет соответствующую функцию Гелл-Манна – Лоу.

Изучение свойств точного фотонного пропагатора облегчено существованием для него дисперсионного представления Челлена– Лемана [7]. В настоящей работе получено аналогичное представление для лагранжевой функции $\mathcal{L}$ постоянного поля, в котором спектральной функцией служит ее мнимая часть – положительная измеримая физическая величина, т. к. $2\mathrm{Im}\,\mathcal{L}$ есть вероятность рождения пар и фотонов полем в единице объема и единицу времени. Это представление таково

$$\mathcal{L}=\frac{\epsilon^2-\eta^2}{2}-\frac{\alpha\epsilon^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{du\,u\,g\left(\frac{u}{e\epsilon},\frac{\eta}{\epsilon}\right)}{u^2-m^4+i\delta}+\frac{\alpha\eta^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{du\,u\,g\left(\frac{u}{e\eta},\frac{\epsilon}{\eta}\right)}{u^2+m^4}. \quad (1)$$

Здесь ϵ, η – электрическое и магнитное поля в системе, где они параллельны, $(\alpha\epsilon^2/2)g(m^2/e\epsilon,\ \eta/\epsilon) = \mathrm{Im}\mathcal{L}$ – мнимая часть лагранжевой функции, отличная от нуля только при $\epsilon\neq 0$. Как $\mathcal{L}$, так и g зависят еще от постоянной тонкой структуры α. Во втором интеграле g связано с $\mathrm{Im}\mathcal{L}$ перестановкой $\epsilon\rightleftarrows\eta$.

Вывод дисперсионного соотношения (1) основан на существовании и свойствах собственновременно́го представления

$$\mathcal{L}-\mathcal{L}^{(0)}=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty\frac{dx\,e^{-im^2x}}{x^3}f(m^2x,\ eFx) \quad (2)$$

для нелинейной поправки к лагранжевой функции $\mathcal{L}^{(0)}$ максвеллова поля. Для поправки $\sim\alpha$ Гайзенберга – Эйлера [8]

$$f^{(1)}=\frac{e\eta x\,e\epsilon x}{\mathrm{tg}\,e\eta x\,\mathrm{th}\,e\epsilon x}-1+\frac{e^2(\eta^2-\epsilon^2)x^2}{3}=e^{-L}S-1+\frac{(eFx)^2}{6} \quad (3)$$

и не зависит от массовой переменной m^2x. Для поправки $\sim\alpha^2$, найденной одним из авторов [4],

$$f^{(2)}=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\xi\left\{\frac{e^{-L-L'}}{\xi^2(1-\xi)^2}\left(-2iz(SS'+PP')x^{-1}I_0-\frac{1}{2}I\right)+\frac{2iz+1}{\xi(1-\xi)}+\right.$$

$$+\frac{(eFx)^2}{6}\left(iz\left(5-\frac{2}{\xi(1-\xi)}\right)+\frac{5}{2}\right)+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2\xi(1-\xi)}-\ln i\gamma z+\frac{5}{6}\right)\left(4iz+2-x\frac{\partial}{\partial x}\right)f^{(1)}\right\} \quad (4)$$

и зависит от $m^2x\equiv z$ линейно и логарифмически; обозначения L, S и т. д. как в [4], причем $s=(1-\xi)x$, $s'=\xi x$. Функция $f^{(2)}$ следует из формулы (50) работы [4] после симметризации последней по s, s'. Структура функций $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ в скалярной электродинамике аналогична, см. [9] и [6].

Как видно из (3), (4) функция $f = f^{(1)} + f^{(2)}$ обладает следующими свойствами: 1) f аналитична по $z = m^2 x$ в нижней полуплоскости комплексного z и является здесь слабо растущей функцией $iz \ln iz$. То же по m^2, если x вещественно и положительно. 2) Вследствие симметрии $\eta \rightleftarrows -i\epsilon$ особенности f по полевой переменной eFx расположены в комплексной плоскости x симметрично на вещественной и мнимой осях (магнитные и электрические особенности), причем ближайшие из них в точках $x = \pm \pi/e\eta$, $\pm i\pi/e\epsilon$ служат началом соответствующих логарифмических разрезов. В точке $x = 0$ f имеет логарифмическую особенность по переменной $m^2 x$ с разрезом выбранным вдоль полуоси $\arg(m^2 x) = \pi/2$. Контур интегрирования в (2) может быть проведен в секторе $-\pi/2 < \arg x < 0$. 3) f вещественна и аналитична на участке $(0, -i\pi/e\epsilon)$ мнимой оси x и поэтому удовлетворяет принципу симметрии Римана – Шварца

$$f(m^2 x,\ eFx) = f^*(-m^2 x^*,\ -eFx^*) \tag{5}$$

для точек x, $-x^*$, симметричных относительно мнимой оси. 4) f инвариантна относительно изменения знака поля $F \to -F$, отражения $\epsilon \to -\epsilon$, $\eta \to \eta$ и преобразования $\eta \rightleftarrows -i\epsilon$.

В силу свойства 1 интеграл (2) как функция m^2 обладает свойствами преобразования Лапласа, т. е. является аналитической функцией в нижней полуплоскости комплексного m^2, стремящейся к нулю при $|m^2| \to \infty$. Поэтому к нему можно применить формулу Коши, которая вместе со свойствами 2 – 4 приводит к дисперсионному представлению (1).

Изложенные свойства представления (2) и, следовательно, представление (1) должны быть справедливы во всех порядках по a, так как они отражают общие физические свойства лагранжевой функции. Так, существование самого лапласовского представления (2) по собственному времени x обязано причинности функций распространения, вследствие чего $\mathcal{L}$ аналитична по m^2 в области $\mathrm{Im}\, m^2 < 0$. Существование на мнимой оси x отрезка $(0, -i\pi/e\epsilon)$ аналитичности и вещественности f связано с независимостью $\mathcal{L}$ от радиационных поправок в пределе слабого поля: $\mathrm{Re}\,\mathcal{L}$ должна быть максвелловой, а $\mathrm{Im}\,\mathcal{L}$ должна иметь существенную особенность

$$(e\epsilon)^2 f_0 \left(a,\ \frac{\eta}{\epsilon}\right) \exp\left(-\frac{\pi m^2}{e\epsilon}\right), \tag{6}$$

определяемую физической массой электрона [4, 6]. Отсюда и свойства 4 следует, что вблизи $x = 0$ функция $f(z,\ eFx)$ имеет структуру вида $(eFx)^4 \cdot$ (полином от iz, $\ln iz$), так что при слабом поле отклонение $\mathrm{Re}\,\mathcal{L}$ от максвелловой функции – четвертого порядка по полю. Аналогично, $\mathrm{Im}\,\mathcal{L}$ при слабом поле ведет себя как (6), так как зависимость от m^2, содержащаяся в f, при $e\epsilon\, m^{-2} \to 0$ эффективно выпадает из $\mathrm{Im}\,\mathcal{L}$ благодаря компенсации вкладов полюса и логарифмического ветвления по переменной eFx в точке $x = -i\pi/e\epsilon$ [4, 6]. Наконец, принцип Римана –

Шварца, связывающий f для двух направлений собственного времени, воплощает симметрию КЭД при обращении времени.

Полученное представление (1) обладает симметрией $\eta \rightleftarrows -i\epsilon$. В асимметричном пределе сильного поля, когда ϵ/η или $\eta/\epsilon \to 0$, из (1) следует связь $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} Z_3$ с константой

$$Z_3 = 1 - \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x} g(x,\ 0) < 1, \qquad (7)$$

т. е. максвелловость точной лагранжевой функции. В конечной КЭД Z_3 должно быть конечным, положительным и независящим от значения второго аргумента функции g, так как предельная константа взаимодействия $a_* = Z_3^{-1} a$ не должна зависеть от способа стремления поля к бесконечности [5, 6]. Иными словами, в конечной КЭД максвелловость точной лагранжевой функции в пределе сильного поля должна иметь место независимо от соотношения между электрическим и магнитным полями.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27 июля 1978 г.

Литература

[1] Л.Д.Ландау, А.А.Абрикосов, И.М.Халатников. ДАН СССР, 95, 773, 1954; 95, 1177, 1954; 96, 261, 1954.

[2] M.Gell-Mann, F.E.Low. Phys. Rev., 95, 1300, 1954.

[3] H.M.Fried. Functional Methods and Models in Quantum Field Theory. MIT Press, Cambridge, 1972. I.Bialynicki – Birula, Z.Bialynicka – Birula. Quantum Electrodynamics. Pergamon Press, Oxford, 1975.

[4] В.И.Ритус. ЖЭТФ, 69, 1577, 1975.

[5] V.I.Ritus. Phys. Lett., 65B, 355, 1976.

[6] В.И.Ритус. ЖЭТФ, 73, 807, 1977.

[7] G.Kallen. Helv. Phys. Acta, 25, 417, 1952; H.Lehmann. Nuovo Cim., 11, 342, 1954.

[8] W.Heisenberg, H.Euler. Zs. Phys., 98, 714, 1936.

[9] J.Schwinger. Phys. Rev., 82, 664, 1951.