

МЕТОД ВКБ ПРИ $Z > 137$

В.Д.Мур, В.С.Попов, Д.Н.Воскресенский

Получены формулы ВКБ приближения для уравнения Дирака в сильном поле ($\epsilon_0 > 2m_e c^2$, где ϵ_0 — энергия связи электрона) внешнем поле. С их помощью вычислены энергия и ширина квазистационарных состояний в нижнем континууме и найден предэкспоненциальный множитель в вероятности спонтанного рождения позитронов. Кратко обсуждаются другие применения метода ВКБ.

В связи с экспериментальным наблюдением [1] позитронов, образующихся в медленных ($v \lesssim 0,1c$) столкновениях тяжелых ядер: $Pb + Pb$, $Pb + U$ и $U + U$, становится актуальным детальный расчет этого процесса, для чего необходимо получить решение уравнения Дирака для задачи двух центров. Поскольку в этом случае переменные не разделяются, то данная задача не имеет аналитического решения, а численные расчеты весьма громоздки и проведены лишь в докритической области $R \geq R_c$, $\epsilon \geq -1$ (см. работы [2, 3]; здесь и далее $\hbar = c = m_e = 1$, ϵ — энергия уровня в единицах $m_e c^2$, R — расстояние между ядрами, $X = \mp(j + 1/2)$; в частности, $\kappa = -1$ для основного уровня). Поэтому следует обратиться к приближенным методам. Естественно рассмотреть метод ВКБ, имеющий в случае кулоновского поля высокую точность даже для небольших квантовых чисел.

Применение метода ВКБ к сильному ($Z > 137$) кулоновскому полю основывалось ранее [4, 5] на квадрировании уравнения Дирака (метод эффективного потенциала [6, 7]). Однако при $\epsilon < -1$ подстановка $\chi(r) = (1 + \epsilon - V)^{-1/2} G(r)$, используемая в этом методе, становится сингулярной в точке $r = r_g$, где $V(r_g) = \epsilon + 1$. Вследствие этого обычные квазиклассические формулы теряют смысл при $r \sim r_g$ из-за расходимости интеграла $\int p dr$. Нам удалось преодолеть эту трудность, проводя разложение по степеням \hbar в исходной системе Дирака для радиальных волновых функций G и F . Разложение по \hbar приводит к цепочке матричных дифференциальных уравнений, которые решаются последовательно с помощью левых и правых собственных векторов однородной системы, вычисляемых в явном виде. Приведем окончательные формулы для волновой функции квазистационарного состояния с энергией $\epsilon < -1$. Эти формулы имеют разный вид в трех областях: I) $r_0 < r < r_-$; II) подбарьерная область $r_- < r < r_+$; III) $r > r_+$. Здесь r_- , r_+ — точки поворота, в которых квазиклассический импульс

$$p(r) = [(\epsilon - V(r))^2 - 1 - \kappa^2 r^{-2}]^{1/2} \quad (1)$$

обращается в нуль (см. рис. 1). При $r_0 < r < r_-$ имеем:

$$G = A \left[\frac{\epsilon - V + 1}{p} \right]^{\frac{1}{2}} \sin \theta_1, \quad F = A \operatorname{sgn} \kappa \left[\frac{\epsilon - V - 1}{p} \right]^{\frac{1}{2}} \sin \theta_2, \quad (2)$$

где

$$\theta_i(r) = \int_{r_0}^r \left(p + \frac{\kappa w_i}{pr} \right) dr + \frac{\pi}{4},$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{1 + \epsilon - V} - \frac{1}{r} \right), \quad w_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{1 - \epsilon + V} + \frac{1}{r} \right).$$

Если ширина уровня $\gamma \ll 1$ (что оправдывается ответом), то следует положить:

$$\int_{r_0}^{r_-} (G^2 + F^2) dr = 1, \quad A = \left\{ \int_{r_0}^{r_-} \frac{dr}{p(r)} \right\}^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{T}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

где T — период колебаний классической частицы, локализованной в области I. В подбарьерной области решение, соответствующее затухающей экспоненте, при $\kappa < 0$ имеет вид

$$G = \frac{V - \epsilon - 1}{Q} F, \quad F = B \left(\frac{Q}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \int_{r_-}^r \left(q - \frac{V'}{2qQ} \right) dr \right\}, \quad (4)$$

а для состояний с $\kappa > 0$

$$G = B \left(\frac{Q}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \int_{r_-}^r \left(q + \frac{V'}{2qQ} \right) dr \right\}, \quad F = \frac{\epsilon - V - 1}{Q} G. \quad (4')$$

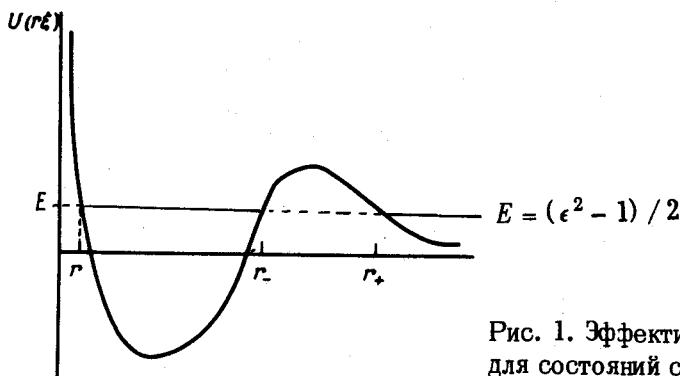


Рис. 1. Эффективный потенциал $U(r, \epsilon)$ для состояний с $\epsilon \leq -1$

Здесь $q = |p(r)|$, $Q = q + |\kappa| r^{-1}$. При $r > r_+$ квазистационарному состоянию отвечает расходящаяся волна; формулы для G и F имеют вид, аналогичный (4) и (4'). Для обхода точек поворота r_- и r_+ можно исполь-

зовать метод Цванна, что позволяет сшить решения и устанавливает связь между нормированными константами. Выражения (2) и (4) существенно отличаются от формул обычной квазиклассики. Как и следовало ожидать, для правильных квазиклассических формул точка $r = r_g$ не является сингулярной, так как $q(r)$ и $Q(r)$ положительны при $r_- < r < r_+$.

Полученные формулы позволяют решать широкий круг задач в теории сверхкритических атомов. Так, из (2) следует правило квантования:

$$\int_{r_0}^{r_-} \left(p + \frac{\kappa w_1}{pr} \right) dr = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (5)$$

которое определяет вещественную часть энергии уровня. Оно отличается от обычного условия квантования Бора — Зоммерфельда релятивистским выражением для импульса $p(r)$ и включением поправки $\hookrightarrow w_1(r)$, учитывающей спин-орбитальное взаимодействие и приводящей к расщеплению уровней с разным знаком κ . Вычисляя поток частиц при $r \rightarrow \infty$, находим ширину уровня γ (т. е. вероятность спонтанного рождения позитронов):

$$\gamma(\epsilon, \kappa) = \gamma_0 \exp \left\{ -2 \int_{r_-}^{r_+} q(r) dr \right\}, \quad (6)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{1}{T} \exp \left\{ 2\kappa \int_{r_-}^{r_+} \frac{w_1}{qr} dr \right\} \quad (6')$$

(последний интеграл понимается в смысле главного значения). В случае кулоновского поля $V(r) = -\zeta/r$ получаем:

$$\gamma(\epsilon, \kappa) = \gamma_0 \exp \left\{ -2\pi\zeta \left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} - \sqrt{1-\rho^2} \right] \right\} \quad (7)$$

$$\gamma_0 = \frac{k^2}{2\zeta} \left[\sqrt{(1-\rho^2)(1+k^2)} - \frac{1}{k} \operatorname{Ar th} \left(k \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+k^2}} \right) \right]^{-1} = \begin{cases} c_0, & k \rightarrow 0 \\ c_1 k, & k \gg 1 \end{cases}$$

где $\zeta = Ze^2$, $\rho = |\kappa| \zeta^{-1}$ ($0 < \rho < 1$) и $k = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$ — импульс позитрона,

$$c_0 = \frac{3}{2\zeta(2+\rho^2)\sqrt{1-\rho^2}}, \quad c_1 = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\rho^2}}$$

Экспоненциальный множитель в (7) был получен ранее [6]. Отметим, что предэкспонента γ_0 существенно зависит от импульса k , что должно учитываться при сравнении теории с экспериментом.

Применение ВКБ метода к задаче двух центров с зарядами Z_1 и Z_2 позволяет получить простое приближенное уравнение для энергии уровня $\epsilon = \epsilon(R, \zeta, \kappa)$:

$$\frac{R}{R_{cr}} = \left[1 - \left(1 + \frac{1 - 2\kappa}{4\zeta^2} \right) (1 + \epsilon) \right]^{-1} \phi(x), \quad (8)$$

которое дает кривые рис. 2. Здесь $\zeta = (Z_1 + Z_2)/137$,

$$\phi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2x} [(1+x) \ln(1+x) - (1-x) \ln(1-x)] - 1 \right\},$$

$$x = \left\{ (1 - \rho^2) \left[\epsilon^2 - 1 + \left(\kappa - \frac{5}{4} \right) \left(\frac{(\epsilon + 1)^2}{\zeta^2} \right) \right]^{1/2} \left[1 - \left(1 + \frac{1 - 2\kappa}{4\zeta^2} (\epsilon + 1) \right) \right] \right\}^{-1}$$

В частности, наклон уровня на границе нижнего континуума описывается формулой

$$\epsilon = -1 + \beta \left(\frac{R}{R_{cr}} - 1 \right) + \dots; \quad \beta = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{4\kappa^2 - 6\kappa + 3}{8\zeta^2} \right)^{-1} \quad (9)$$

(критическое расстояние R_{cr} вычислено в работах [2, 3]).

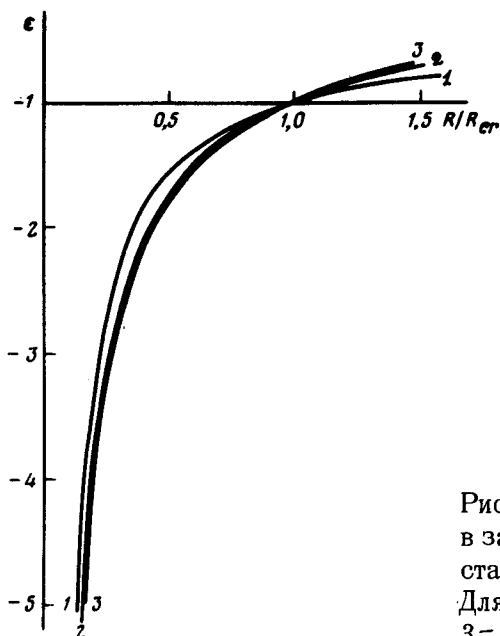


Рис. 2. Энергия основного уровня $1s \sigma$ в зависимости от расстояния R между сталкивающимися ядрами ($Z = Z_1 + Z_2$). Для кривой 1 — $Z = 137$; для кривых 2 и 3 — $Z/2 = 92$ и 100

В качестве дальнейших приложений метода ВКБ к теории сверхкритических атомов укажем на следующие задачи: 1) расчет эффекта экранировки, т. е. вычисление R_{cr} для квазимолекулы (Z_1, Z_2, e), окруженной внешними электронными оболочками; 2) учет конечной скорос-

ти движения ядер; 3) угловое распределение вылетающих позитронов (что сводится к задаче о туннелировании частицы с отличным от нуля угловым моментом через потенциальный барьер с малой несферичностью). Применение метода ВКБ позволяет получить ответ в замкнутом виде, избегая громоздких численных расчетов.

Авторы благодарны В.Л.Елецкому и М.С.Маринову за полезные обсуждения в ходе работы.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
21 июня 1978 г.

Московский
инженерно-физический институт

Литература

- [1] Phys. today, 3, 19, March 1978; H.Backe, L.Handschug et al. Phys. Rev. Lett., 40, 1443, 1978.
 - [2] М.С.Маринов, В.С.Попов. ЖЭТФ, 65, 2141, 1973; V.I.Lisin, M.S.Marinov, V.S.Popov. Phys. Lett., 69B, 141, 1977.
 - [3] B.Müller, J.Kafelski, W.Greiner. Phys. Lett., 47B, 5, 1973. J.Rafelski, B.Müller. Phys. Lett., 65B, 205, 1976.
 - [4] М.С.Маринов, В.С.Попов. ЖЭТФ, 67, 1250, 1974.
 - [5] В.П.Крайнов. Письма в ЖЭТФ, 13, 359, 1971.
 - [6] В.С.Попов. Письма в ЖЭТФ, 11, 254, 1970; ЖЭТФ, 59, 965, 1970.
 - [7] Я.Б.Зельдович, В.С.Попов. УФН, 105, 403, 1971.
-