Письма в ЖЭТФ, том 28, вып. 1, стр. 37 – 41 *5 июля 1978 г.*

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЯНГА – МИЛЛСА И КОНДЕНСАЦИЯ ГЛЮОННОГО ПОЛЯ

А.Б.Мигдал

Показано, что в присутствии цветных источников (например, тяжелых кварков и антикварков) глюонное поле делается неустойчивым и возникает конденсация глюонов, аналогичная пионной конденсации в электрическом поле. Обсуждается возможное влияние этого явления на невылетание кварков и структуру адронов.

Примем для простоты $SU(2)$-симметрию и предположим, что нет кваркового поля – кварки рассматриваются как внешние источники, имеющие только цветовую степень свободы.

Таким образом, исходный лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{4g_0^2}\,(G^a_{\mu\nu})^2 + \frac{g_0}{2}\sum_k \delta(r - r_k)\,\chi^*_k \tau^a \chi_k A^a_0\,, \tag{1}$$

где τ^a – матрицы Паули, действующие на цвет кварков, расположенных в точках r_k:

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \epsilon_{abc} A^b_\nu A^c_\mu\,.$$

Пусть неподвижные источники создают достаточно сильное среднее поле A^a_0, имеющее третью цветную компоненту $A^a_0 = A_0\,\delta_{a3}$. Так как цвет входит в нелинейные члены уравнений Янга – Миллса в виде векторных произведений цветовых векторов, то в уравнения для A^3_n поле A_0 не входит и для выяснения неустойчивости естественно положить $A^3_n = 0$. Введем вместо A^a_n заряженные компоненты $A^\pm_n$, A°_n.

$$A^\pm_n = \frac{A^1_n \pm i A^2_n}{\sqrt{2}}\,, \qquad A^\circ_n = A^3_n = 0.$$

Тогда простые алгебраические выкладки приводят уравнения Янга – Миллса к следующему виду:

$$\Delta A_n^{\pm} + (\omega \mp A_0)^2 A_n^{\pm} \mp \{A_m^{\pm}(A_n^{+}A_m^{-} - A_n^{-}A_m^{+})\}_{\omega} = 0, \tag{2}$$

$$\Delta A_0 = \rho_0 + \Sigma\, 2(\omega - A_0)A_n^{+}A_n^{-},$$

где $\rho_0 = \Sigma\, \chi_k^{*}\, r^3 \chi_k \delta(r - r_k)$ и ω – частота поля $A_n^{\pm}$.

Уравнения (2) имеют простой физический смысл. Второе слагаемое в правой части второго из уравнений (2) дает изменение вакуумной плотности заряда в присутствии поля A_0. Первое уравнение совпадает с уравнением для заряженного векторного бозона в электрическом потенциале A_0. При исследовании устойчивости этого уравнения могут быть использованы методы, развитые в [1], где исследовались неустойчивость и конденсация поля скалярных заряженных бозонов в электрическом поле.

Неустойчивость глюонного поля. Убедимся, что при достаточной величине поля A_0 возникает неустойчивость, т. е. экспоненциальное нарастание поля $A_n^{\pm}$. Для этого отбросим нелинейные члены, умножим второе из уравнений (2) для A_n^{+} на $(A_n^{+})^{1)}$ и проинтегрируем по пространству. Обозначим через

$$\overline{B} = \frac{\int (A^{+})^{*} B A^{+} dV}{\int (A^{+})^{*} A^{+} dV}$$

взвешенное среднее значение оператора B. Получаем

$$\omega^2 - 2\omega\overline{A}_0 + \overline{A_0^2} - \overline{p^2} = 0, \tag{3}$$

где $\overline{p^2}$ – среднее значение квадрата импульса поля A_n^{+}. Из (3) следует

$$\omega = \overline{A}_0 + \left[\overline{A}_0^2 - \overline{A_0^2} + \overline{p^2}\right]^{1/2}.$$

При выполнении условия $\overline{A_0^2} - \overline{A}_0^2 - \overline{p^2} > 0$ наступает неустойчивость поля $A_n^{\pm}$. Покажем, что это условие выполняется в случае системы кварк – антикварк при достаточном расстоянии R между кварками. Действительно, в этом случае, как легко видеть, $\overline{A}_0 = 0$; невылетание кварков означает, что потенциал A_0 неограниченно возрастает с увеличением R, между тем как величина $\overline{p^2} \sim 1/R^2$.

Пионная конденсация. Поскольку в результате неустойчивости возникают слабонеоднородные поля, то задача сводится к получению эффективных макроскопических уравнений для классического поля в среде, описываемой уравнениями Янга- Миллса.

Имеются два типа нелинейных эффектов, которые определяют характер интересующих нас уравнений. Прежде всего, это эффекты, которые могут быть получены с помощью теории возмущений по нелинейным слагаемым "микроскопических" уравнений Янга– Миллса. Эти слагаемые имеют локальный характер, т. е. зависят от напряженностей полей, а не от потенциалов и могут быть учтены введением в уравнения Янга –Миллса диэлектрической постоянной $\epsilon(G_{\mu\nu})$, зависящей от $(G^a_{\mu\nu})^2$. Аналогичная величина для электродинамики вводилась в [2] и с точностью до второго порядка по эффективной константе взаимодействия $g^2(G_{\mu\nu}) = g_0^2/\epsilon(G_{\mu\nu})$ имеет вид, совпадающий с известным выражением Вайскопфа, Гейзенберга, Эйлера. В случае уравнений Янга – Миллса выражение для $\epsilon(G_{\mu\nu})$ получено в [3]. Ниже мы будем использовать не детальный ход $\epsilon(G_{\mu\nu})$, а только тот факт, что $\epsilon(G_{\mu\nu})$ уменьшается на больших расстояниях от заряда и, следовательно, осуществляет антиэкранировку. При этом в лагранжиане (1) член $1/g_0^2\, G^2_{\mu\nu}$ заменится на $\epsilon G^2_{\mu\nu}$, в результате чего в уравнениях (2) нелинейные члены умножатся на ϵ, а ΔA^a заменится на $\operatorname{div}\epsilon\nabla A^2$.

Гораздо более существенным источником нелинейности является рассмотренная выше конденсация глюонного поля, которая определяется потенциалами A_0 и $A_n^{\pm}$.

При квантовополевом рассмотрении задачи о пионной конденсации в электрическом поле [1] рассматривался лагранжиан, отличающийся от того, которому соответствует уравнение (2), только отсутствием значка n у заряженного поля и выводом ангармонических членов. Следуя этой работе, принебрежем влиянием всех остальных степеней свободы поля, кроме той, которая соответствует состоянию конденсата. Как показано в [1], конденсат делает стабильным все остальные степени свободы, и изменение их нулевых колебаний в поле A_0 не оказывает существенного влияния на условия конденсации.

Основному состоянию соответствует конденсат с частотой $\omega = 0$. Цветовая структура и координатная зависимость конденсатного поля $A^a_n(r)$ определяется из уравнений (2), в которые введено $\epsilon(G_{\mu\nu})$. Подстановка матрицы A^a_n общего вида в (2) дает в квазиклассическом приближении (т. е. когда $(\Delta + A_0^2)\, A^a_n$ заменяется на MA^a_n, где M – числовая функция)

$$A^a_3 = 0,\quad A^a_n = \psi(r)[q_1\delta_{na} + q_2\epsilon_{na}],$$

где ϵ_{na} – единичный антисимметричный тензор. С квазиклассической точностью $\psi^2(r)\,(q_1^2 + q_2^2) = A_0^2(r)$;

При квантовом рассмотрении в соответствии с [1] следует заменить q_1 и q_2 на операторы. Для конденсатных степеней свободы получается следующий гамильтониан:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + \tilde{\omega}^2(q_1^2 + q_2^2)}{2} + \frac{\lambda_1}{4}\,(q_1^2 + q_2^2) + \bar{A}_0\, Z\,.$$

Задача свелась к двумерному ангармоническому осциллятору. Заряд конденсата Z – целочисленный и выражается через третью проекцию момента осциллятора в цветовом пространстве:

$$Z = q_1 p_2 - q_2 p_1.$$

Величина $\widetilde{\omega}^2 = \overline{A_0^2} - \overline{A}_0^2 + \overline{p^2} < 0$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}\int \psi^4 dV$, ψ — определяется уравнением

$$\Delta\psi(r) + \nabla \ln\epsilon \, \nabla\psi + A_0^2 \, \psi_0 - \frac{(q_m q_m q_n)_{01}}{(q_n)_{01}} \, \psi^3 = 0. \qquad (6)$$

Пусть $\psi^3(r)$ нормирована на единицу, тогда величина $(q_1^2 + q_2^2)$ имеет большое среднее значение, растущее с R, поскольку $\lambda_1 \sim 1/V$, поэтому

$$(q_m q_m q_n)_{01} \cong \langle q_m q_m \rangle (q_n)_{01} \equiv \xi^2 (q_n)_{01}.$$

В результате уравнение (6) не зависит от n и от выбора состояний 0, 1. Можно написать уравнение и для собственных состояний сплошного спектра, которые вне области действия поля A_0 должны переходить в нулевые колебания свободного глюонного поля. Поле конденсата и обеспечивает положительность ω^2 (т. е. устойчивость). Энергия конденсата с точностью до малых поправок (не содержащих R) равна (см. [1])

$$E = \overline{A}_0 Z + \frac{Z^2}{2\xi^2} + \frac{\widetilde{\omega}^2 \xi^2}{2} + \frac{\lambda_1 \xi^4}{4}.$$

Минимизируя энергию по ξ и Z получим

$$\xi^2 = \frac{\overline{A_0^2} - \overline{p^2}}{\lambda_1}, \qquad Z = -\overline{A}_0 \frac{\overline{A_0^2} - \overline{p^2}}{\lambda_1}, \qquad E = -\frac{(\overline{A_0^2} - \overline{p^2})^2}{4\lambda_1} \qquad (7)$$

При $\overline{A}_0 = 0$ минимум энергии соответствует $Z = 0$. Таким образом, средний квадрат конденсатного поля растет с R, как A_0^2, тогда как среднее поле $A_n^a = \langle q_m \rangle \psi = 0$ строго равно нулю. Приведем еще выражение для плотности глюонного заряда

$$\rho = -A_0 \langle A_n^a A_n^a \rangle = -2A_0 \xi^2 \psi^2(r). \qquad (8)$$

Итак, уравнение для A_0 принимает вид

$$\nabla \ln\epsilon \, \nabla A_0 + \Delta A_0 = \rho_0/\epsilon - 2A_0 \xi^2 \psi^2(r). \qquad (9)$$

Решение уравнений (6), (9) вместе с уравнениями для нулевых колебаний в конденсатном поле позволит, как мы надеемся, получить теоретически свойства адронного "мешка" и, в частности, установить, является ли он струной.

Неустойчивость глюонного поля непосредственно связана с инстантонными колебаниями вакуума. Действительно, рассмотрим флуктуацию глюонного поля, соответствующую образованию положительного и отрицательного зарядов. При малых расстояниях между зарядами, кроме исходного глюонного поля, возникает только поле A_0. Однако при достаточной величине флуктуации (при достаточном раздвижении зарядов) по-является неустойчивость и возникает дополнительное глюонное поле. При рассасывании флуктуации система может перейти в состояние с $G_{\mu\nu} = 0$, но с полями A_0 и A_n^a отличными от нуля, что и соответствует инстантонным флуктуациям.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 мая 1978 г.

Литература

[1] А.Б.Мигдал. ЖЭТФ, **61**, 2209, 1971.

[2] А.Б.Мигдал. ЖЭТФ. **63**, 1993, 1973.

[3] С.Г.Матинян, Г.К.Саввиди. Поляризация вакуума интенсивным калибровочным полем. Ереванский физ. ин-тут, препринт 1977.