Письма в ЖЭТФ, том 27, вып. 8, стр. 429 – 434 *20 апреля 1978 г.*

РЕЛАКСАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ И ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

С.М.Дикман

Рассматривается релаксация плазменных колебаний в слабонеоднородной анизотропной бесстолкновительной плазме. Подробно исследуется затухание ленгмюровских волн. Декремент затухания Ландау экспоненциально возрастает с течением времени, вследствие линейного роста во времени характерного волнового вектора.

Настоящая статья посвящена решению начальной задачи о релаксации возмущения в одномерно неоднородной (вдоль оси X) плазме. Характерные длины волн, возникающих в плазме колебаний предполагаются малыми по сравнению с размером неоднородности. Будем считать, также, что продольная диэлектрическая проницаемость плазмы $\epsilon(x,\omega,\mathbf{k}) = k^{-2}\epsilon_{ij}(x, \omega, \mathbf{k})k_i k_j$ является монотонной функцией координаты x. Спектр собственных продольных колебаний определяется в указанных условиях решениями $\omega(x,\mathbf{k})$ дисперсионного уравнения

$$\epsilon(x, \omega, \mathbf{k}) = 0, \qquad (|\operatorname{Im}\omega| << |\operatorname{Re}\omega|). \tag{1}$$

Используемый нами метод позволяет, в принципе, решить задачу о релаксации плазмы независимо от типа возникающих собственных колебаний. Мы, однако, ограничимся определением времени релаксации $\tau(x)$ плазменных волн, частота которых удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re}\omega(x, \mathbf{k}) >> |k\partial\omega(x, \mathbf{k})/\partial k|. \tag{2}$$

Исходное уравнение для потенциала электростатических волн ($\omega <<$ $<< kc$) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\int \hat{\epsilon}_{ij}(x,\ t-t',\ \mathbf{r}-\mathbf{r}')\ \frac{\partial \phi(\mathbf{r}',t')}{\partial x_j'}\ d^3\mathbf{r}'\right] = -4\pi\rho(\mathbf{r},\ t). \qquad (3)$$

Будем считать выполненными неравенства $k_x a >> 1$, $a >> r_D$ ($a \sim \sim \epsilon / \frac{\partial \epsilon}{\partial x}$, r_D – дебаевский радиус, k_x – составляющая волнового вектора, направленная вдоль оси X). Ядро в интегральном уравнении (3) связано с тензором диэлектрической проницаемости известным соотношением [1],

$$\epsilon_{ij}(x,k,\omega) - \frac{i}{2}\ \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}(x,k,\omega)}{\partial x\,\partial k_x} = \int \int_0^{\infty} \hat{\epsilon}_{ij}(x,t_0,r_0)\exp(i\omega t_0 - ikr_0)dt_0\, d^3 r_0 .$$

Пусть $x = x_0(\omega,\ \mathbf{k})$ – корень уравнения (1). Собственные колебания с заданными ω и $\mathbf{k}$ локализованы вблизи $x_0(\omega,\ \mathbf{k})$[1]. Воспользуемся теперь приближением слабой неоднородности:

$$\epsilon_{ij} = a_{ij}(\omega,\ \mathbf{k}) - \beta_{ij}(\omega,\ \mathbf{k})(x - x_0(\omega,\ \mathbf{k})). \qquad (4)$$

Здесь $a_{ij} = \epsilon_{ij}|_{x=x_0}$, $\beta_{ij} = -\partial\epsilon_{ij}/\partial x|_{x=x_0}$, $a_{ij}k_i k_j = 0$, $\mathrm{Re}\beta_{ij}k_i k_j k^{-2} = a^{-1} > 0$. Применяя к (4) обратное преобразование Фурье по ω и k мы найдем тензор $\hat{\epsilon}_{ij}(x,\ t_0,\ \mathbf{r}_0)$, который подставим в уравнение (3). После чего преобразуем (3) по Фурье и получим следующее уравнение, связывающее компоненты $\bar{\rho}(\omega,\ \mathbf{k})$ и $\bar{\phi}(\omega,\ \mathbf{k})$ (ср. с [2])

$$i\beta_{ij}k_i k_j \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial k_x} + \left(i\beta_{ix}k_i + \frac{i}{2}\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial k_x}k_i k_j - \beta_{ij}k_i k_j x_0\right)\bar{\phi} = -4\pi\bar{\rho}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{\phi}(\omega,\ k) = -\frac{4\pi i}{(\beta_{ij}k_i k_j)^{1/2}} \int_{k_x}^{+\infty} \frac{\bar{\rho}(\mathbf{k}',\ \omega)}{(\beta_{ij}(\mathbf{k}')k_i' k_j')^{1/2}} \exp\left[\frac{1}{2}\int_{k_x'}^{k_x} \frac{(\beta_{xi}(\mathbf{k}'') - \beta_{ix}(\mathbf{k}''))}{\beta_{ij}(\mathbf{k}'')k_i'' k_j''}\, dk_x'' \right.$$

$$\left. - i\int_{k_x'}^{k_x} x_0(\omega,\ \mathbf{k}'')\, dk_x''\right] dk_x', \qquad (5)$$

---

[1] Уравнение (1) при заданных ω и $\mathbf{k}$ имеет, вообще говоря, несколько корней $x_0^{(i)}(\omega,\mathbf{k})$. Мы будем считать, что все они достаточно далеки друг от друга $|k_x(x_0^{(i)} - x_0^{(j)})| >> 1$ ($i \neq j$), тогда можно ограничиться рассмотрением поля вблизи каждого из этих корней по отдельности.

где $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ — векторы, имеющие составляющие $(k'_x, \mathbf{k}_\perp)$ и $(k''_x, \mathbf{k}_\perp)$ соответственно. Константа интегрирования выбрана из условия регулярности фурье-компоненты потенциала при $k_x \to \pm\infty$, при этом мы считаем плазму термодинамически устойчивой: $\mathrm{Im}\,\epsilon(\omega, \mathbf{k}) > 0$. Потенциал определяется подстановкой (5) в формулу

$$\phi(x,t,\mathbf{k}_\perp) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\phi}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t + ik_x x)\, d\omega\, dk_x .$$

Ограничимся исследованием случая, когда характерный пространственный размер плотности сторонних зарядов достаточно велик $a\,\partial\rho/\partial x \lesssim \rho$. Тогда, учитывая условие (2), а также $k_x a \gg 1$, мы можем вынести экспоненту в (5) за знак интеграла, положив при этом $k'_x = 0$. Рассматривая времена настолько большие, что $t\,\partial\rho/\partial t \gg \rho$, оценим интеграл (6) в приближении геометрической оптики. Дифференцируя по ω и k_x быстро меняющиеся функции в показателе экспоненты, находим точки стационарной фазы $k_x = \tilde{k}(x,t,\mathbf{k})$, $\omega = \tilde{\omega}(x,t,\mathbf{k}_\perp)$ из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\omega} \int_0^{k_x} x_0(\omega, \mathbf{k})\, dk_x = -t, \qquad x = x_0(\omega, \mathbf{k}). \tag{7}$$

Согласно (2) и (7), $\tilde{k}$ в нулевом приближении по параметру $\tilde{k}(\partial \ln\tilde{\omega}/\partial k_x)$ (т. е. при полном пренебрежении пространственной дисперсией) определяется выражением $\tilde{k} = -t\,\partial\tilde{\omega}/\partial x$. Линейный рост волнового вектора со временем в нашем случае, как и во всех задачах с непрерывным спектром колебаний, возникает из-за "разбегания" фаз (см. [3], а также обзор [4] и работы [5 – 8], в которых рассматриваются волны в неоднородной плазме без учета кинетических тепловых эффектов). Потенциал (6) можно представить в виде $\phi(x,t,\mathbf{k}_\perp) = f(x,t,\mathbf{k}_\perp)\exp(i\Psi)$, где эйконал равен

$$i\Psi(x,t,\mathbf{k}_\perp) = -i\tilde{\omega}t + i\tilde{k}x - i\int_0^{\tilde{k}} x_0(\tilde{\omega}, \mathbf{k}')\, dk'_x = -i\int_0^t \tilde{\omega}(x, t')\, dt' .$$

Характерное время релаксации должно, очевидно, определяться из соотношения

$$\int_0^\tau \mathrm{Im}\,\tilde{\omega}(x, t')\, dt' \sim -1 . \tag{8}$$

Рассмотрим подробнее ленгмюровские колебания в плазме с неоднородной плотностью. Из уравнений (7) находим

$$\tilde{k} = k_0 \left[1 - \frac{3}{2} r^2 (t^2 \omega_e'^2 + k_\perp^2)\right], \text{ где } \quad k_0 = -t\omega_e'$$

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\omega} = \gamma(\tilde{k}(x, t, \mathbf{k}_\perp), \mathbf{k}_\perp) = -\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{\omega_e(x)}{(k_0^2 + k_\perp^2)^{3/2} r^3} \exp\left[-3 + \frac{3}{2}\, \frac{k_\perp^2}{k_0^2 + k_\perp^2} - \right.$$

$$-\frac{1}{2(k_o^2 + k_\perp^2)\,r^2}\Bigg].$$

Здесь $\omega_e^2 = 4\pi n_e(x)\,e^2/m_e$, $r(x) = v_{Te}/\omega_e$, $\omega_e' = d\omega_e/dx$. Вычисляя интеграл (8) (см. ниже формулу (11)), получаем

$$\tau(x) = \omega_e'^{-1}\left[\frac{1}{2r^2\ln(\omega_e/r\,|\omega_e'|)} - k_\perp^2\right]^{1/2}.$$

Эта формула справедлива, если $k_\perp \lesssim r\omega_e' << r^{-1} >> \omega_e'/\omega_e$ и кроме того $\tau\gamma(\omega_e'/\omega_e, k_\perp) << 1$, $\tau\nu_{eff} << 1$. Процесс затухания Ландау ленгмюровских волн в неоднородной плазме протекает следующим образом (см. рис. 1): за времена t, такие, что $\tau - t >> \delta = r^2\omega_e'^2\tau^3$ амплитуда колебаний слабо меняется, при $|t - \tau| \sim \delta$ происходит быстрая релаксация колебаний, при $t - \tau >> \delta$ колебания можно считать полностью затухшими. Такая временная зависимость является следствием линейного возрастания $\tilde{k}$ с течением времени. Качественно такая же картина затухания будет наблюдаться и для других плазменных колебаний, удовлетворяющих условию (2), если соответствующий декремент экспоненциально зависит от $\tilde{k}$. Приведем теперь полностью выражение для потенциала ленгмюровских колебаний:

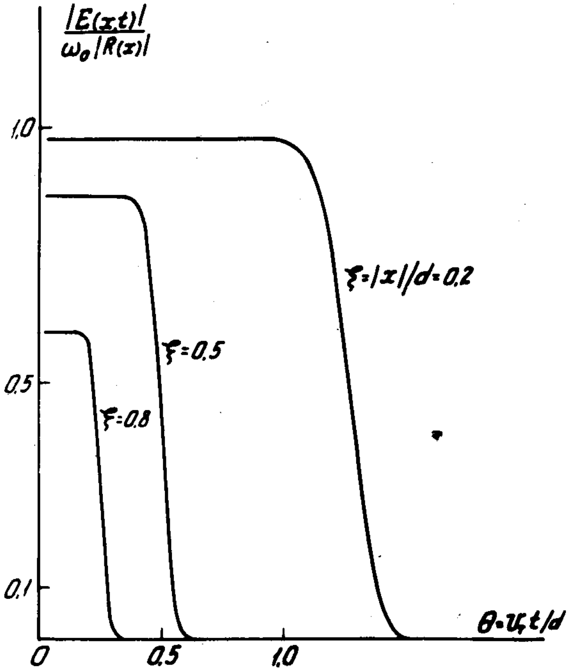
$$\phi(x,t) = -iR(x,\mathbf{k}_\perp)\,\omega_e(x)(\omega_e'^2 t^2 + k_\perp^2)^{-1/2}\exp(i\Psi), \qquad (10)$$

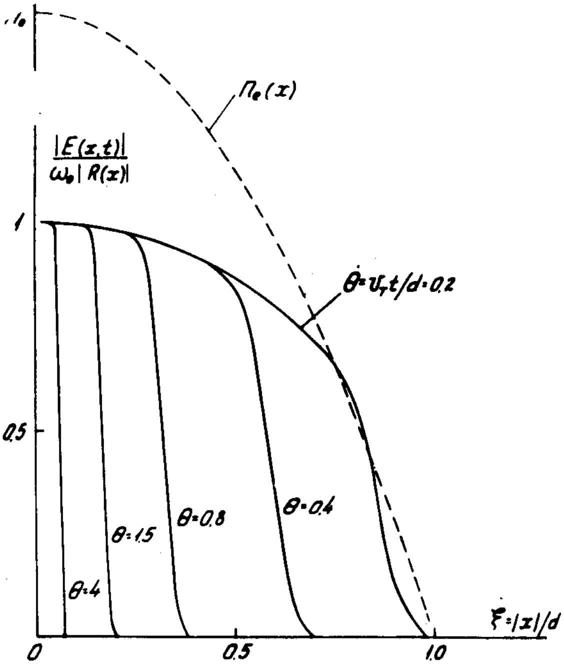
$$i\Psi = -i\omega_e(x)t + \frac{i}{2}r^2\omega_e(t^3\omega_e'^2 + 3k_\perp^2 t) - (\pi/8)^{1/2}\frac{\omega_e}{r\,|\omega_e'|}\times$$

$$\times\ [1 + (k_\perp/t\omega_e')^2]^{1/2}\exp\left[-3 - \frac{1 - 3k_\perp^2 r^2}{2r^2(t^2\omega_e'^2 + k_\perp^2)}\right], \qquad (11)$$

где $R(x,\mathbf{k}_\perp) = \int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\rho}(\omega_e(x),\mathbf{k}')e^{ik_x'x}dk_x'/k'$. Формула (11) справедлива при условии $t^{-1}\omega_e^{-2} << \omega_e''/\omega'^2 << t$. Выписанные в (11) мнимые члены дают правильное значение фазы колебаний, если $t << min[(r\omega_e')^{-4/5}\omega_e^{-1/5}, \omega_e^{-1}(k_\perp r)^{-1/4}]$, тогда как величину амплитуды колебаний можно вычислять по формуле (10) вплоть до времен $t \sim \tau$. На рис. 2 показана релаксация в плазме с "колоколообразным" распределением плотности $\omega_e^2 = \omega_o^2(1 - x^2/d^2)$, при условии что $k_\perp/\omega_e' << t \lesssim \tau$:

$$|\mathbf{E}(x,t)| = \left|\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right| = \omega_o\,|R(x)|\,(1-\xi^2)^{1/2}\exp\left[-\beta\frac{(1-\xi^2)^{3/2}}{\xi}\exp\left(-3-\frac{1-\xi^2}{2\xi^2\theta^2}\right)\right]$$





На рисунках 1 и 2 показана релаксация ленгмюровских колебаний в плазме с колоколообразным распределением плотности электронов при значении параметра $\beta = (\pi/8)^{1/2} a\omega_0/v_{Te} = 5 \cdot 10^3$

где $\xi = |x|/d$, $\theta = v_{Te}t/d$, $\beta = (\pi/8)^{1/2} a\omega_0/v_{Te} \gg 1$. Из рисунка видно, что наиболее долго живущими являются колебания вблизи максимума концентрации (распределение концентрации показано пунктиром). Заметим, однако, что, если $x \lesssim a/(\omega_0 t)^{1/2}$, то найденный нами ответ становится не пригоден, так как в разложении (4) необходимо учитывать члены более высокого порядка.

Автор благодарен Л.П.Питаевскому, В.И.Карпману и А.А.Рухадзе за обсуждение.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
30 декабря 1977 г.

Литература

[1] А.Б.Михайловский. Теория плазменных неустойчивостей, т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы, Атомиздат, 1977.

[2] С.М.Дикман. ЖЭТФ, 74, 112, 1978.

[3] Б.Б.Кадомцев. Коллективные явления в плазме. М., изд. Наука, 1976, стр. 95.

[4] А.В.Тимофеев. УФН, 102, 185, 1970.

[5] E.M.Barston. Annals of Physics, 29, 282, 1964.

[6] C.Uberoi. Phys. Fluids, 15, 1673, 1972.

[7] W.Grossman, M.Kaufman, J.Neukauser. Nucl. Fusion, 3, 462, 1973.

[8] В.А.Мазур, А.Б.Михайловский, А.Л.Френкель, И.Г.Шухман. Препринт ИАЭ-2693, М., 1976.