Письма в ЖЭТФ, том 27, вып. 8, стр. 445 – 448 20 апреля 1978 г.

К УСТОЙЧИВОСТИ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ ВТОРОГО РОДА

Р.Г.Минц

Рассмотрены осцилляции электромагнитного поля и температуры в сверхпроводниках второго рода, предшествующие скачку магнитного потока.

Вопрос об устойчивости критического состояния в жестких и комбинированных сверхпроводниках неоднократно обсуждался в литературе. Соответствующие критерии возникновения скачков магнитного потока, полученные в линейном по малому возмущению приближении, хорошо известны [1,2]. В значительной мере малоисследованным остается вопрос о развитии появившейся неустойчивости и, соответственно, о конечных скачках потока [1]. В настоящей работе в линейном приближении найдена область существования ограниченных, осциллирующих возмущений температуры Θ, электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей.

Развитие возмущений Θ, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ описывается уравнением теплопроводности и системой уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \nu\dot{\Theta} = \kappa\Delta\Theta + \mathbf{j}_c\mathbf{E} \\ \Delta\mathbf{E} = \dfrac{4\pi}{c^2}\dfrac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} \end{cases}, \tag{1}$$

где $\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \sigma \mathbf{E} + \dfrac{\partial \mathbf{j}_c}{\partial T}\Theta$, ν, κ, σ – соответственно, теплоемкость, теплопроводность и электропроводность (в резистивном состоянии) сверхпроводника, j_c – плотность критического тока (для простоты рассмотрена модель критического состояния Бина $j_c = j_c(T)$).

Решение системы уравнений (1) будем искать в виде: $\Theta = \Theta(\mathbf{r})\, e^{\Gamma t}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{\Gamma t}$. Для определения спектра собственных чисел Γ, к уравнениям (1) следует поставить тепловые и электродинамические граничные условия.

Рассмотрим, например, теплоизолированный полубесконечный образец в параллельном поверхности (плоскость y, z) внешнем магнитном поле $H \parallel z$. В этом случае $E(L) = 0$ ($L = \dfrac{cH}{4\pi j_c}$ – глубина проникновения магнитного поля), температура и поток тепла $\kappa \dfrac{\partial \Theta}{\partial x}$ непрервны при $x = L$, $\dfrac{\partial H(0)}{\partial t} = \dfrac{\partial E(0)}{\partial x} = 0$, а $\dfrac{\partial \Theta(0)}{\partial x} = 0$. Поскольку $\partial j_c / \partial H = 0$, то система (1) – система линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Из условия существования ее решения (равенства нулю соответствующего детерминанта), нетрудно получить уравнение для определения Γ:

$$(\lambda - K_1^2)K_2 \operatorname{tg} K_2 - (\lambda + K_2^2)K_1 \operatorname{th} K_1 = \sqrt{\lambda}(K_1^2 + K_2^2), \qquad (2)$$

где

$$\lambda = \Gamma \frac{L^2 \nu}{\kappa}, \quad K_{12}^2 = \pm \frac{\lambda(1+r)}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2(1-r)^2}{4} + \lambda\beta},$$

$$\beta = \frac{1}{\nu j_c}\left|\frac{d j_c}{dT}\right| \frac{H^2}{4\pi}, \qquad r = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\kappa\sigma}{\nu}.$$

Границе устойчивой области $\operatorname{Im}\lambda = 0$, $\operatorname{Re}\lambda(\beta, r) > 0$, как обычно, соответствует $\beta = \beta_c(r)$ [2,3]. В большинстве сверхпроводников $r \ll 1$, т.е. распространение тепла происходит гораздо медленнее, чем диффузия магнитного поля. Это условие позволяет получить аналитически зависимость $\beta_c = \beta_c(\tau)$: $\beta_c = \beta_0(1+2\sqrt{\tau})$, $\beta_0 = \frac{\pi^2}{4}$, $\lambda_c = \lambda(\beta_c) = \frac{\beta_0}{\sqrt{\tau}} >> 1$ [2]. Решая (2) при $\beta \sim \beta_c$ и условии $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} >> 1$, находим:

$$\lambda_{1\,2} = \frac{\beta - \beta_0 \pm \sqrt{(\beta - \beta_0)^2 - 4\beta_0 \tau}}{2\tau} . \qquad (3)$$

Как видно из зависимости (3), в области $\beta_0 < \beta < \beta_c$, или $H_0 < H < H_j$ (здесь H_0 и H_j определяются из условий $\beta(H_0) = \beta$, $\beta(H_j) = \beta_c$) спектр собственных чисел оказывается комплексным: $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1$, причем $\lambda_0 > 0$. Отметим, что при $\beta = \beta_0$ мы имеем $\lambda = \frac{i\beta_0}{\sqrt{\tau}} = \tau\lambda_c$.

Таким образом, в узком интервале непосредственно перед скачком магнитного потока $H_0 < H < H_j$, $\frac{H_j - H_0}{H_j} = \sqrt{\tau} << 1$ могут наблюдаться осцилляции электрического поля и температуры. Рассмотрим ситуацию в области значений магнитного поля $H_0 \leq H < H_j$ подробнее. Уравнение (1) и полученное из него соотношение (2) справедливы при линейной связи между током j и электрическим полем E. Последнее условие выполняется лишь для значений $E > E_0(T)$, где $E_0(T)$ – граница линейного участка на кривой $j = j(E, T)$, следовательно величина электрического поля в образце существенно сказывается на характере наблюдаемых эффектов.

Пусть изначально электрическое поле отсутствует. Тогда даже достаточно большая по величине флуктуация за время $t_1 \sim L^2\nu/\lambda_1\kappa$ уменьшится настолько, что всюду в образце будет выполнено условие $E < E_0(T)$, после чего возмущение заведомо затухнет [2]. Следовательно, нарастание флуктуаций с инкрементом $\Gamma = \lambda_0\kappa/\nu L^2$ в начальный момент приведет к изменению магнитного потока лишь на конечную величину. Экспериментально, таким образом, будут наблюдаться ограниченные скачки магнитного потока, величина которых пропорциональна амплитуде начального возмущения.

При исследовании устойчивости критического состояния во внешнем магнитном поле, меняющемся с заданной скоростью $\dot{H}$, изначально имеется электрическое поле $E \sim \frac{L}{c}\dot{H}$. Если $\frac{L}{c}\dot{H} > E_0(T)$, или $\dot{H} > \frac{c\,E_0(T)}{L}$, то в образце действительно могут развиться осцилляции электрического поля с амплитудой вплоть до $\frac{L}{c}\dot{H}$. Оценим число осцилляций N, наблюдающихся при заданной величине $\dot{H}$. Поскольку значение магнитного поля лежит в интервале $\Delta H = H_j - H_0 = \sqrt{\tau}H_j$ в течение промежутка времени $\Delta t = H_j\sqrt{\tau}/\dot{H}$, то N можно оценить как отношение величины Δt к характерному периоду осцилляций, отсюда

$N \sim \frac{\Delta t}{\mathrm{Im}\Gamma} = \frac{H_j \kappa}{\dot{H} L^2 \nu}$; видно что $N \gtrsim 1$ при $\dot{H} \lesssim H_j \frac{\kappa}{\nu L^2}$. Таким образом, осцилляции могут наблюдаться, если скорость изменения внешнего магнитного поля находится в пределах $\frac{c E_0(T)}{L} < \dot{H} < \frac{H_j \kappa}{\nu L^2}$, или:

$$\frac{E_0}{H_j} 4\pi j_c < \dot{H} < r\, 4\pi j_c \frac{j_c}{\sigma H_j} .$$

Можно показать, что осцилляции в полубесконечном образце возникают при произвольном теплоотводе на границе. Аналогичным образом нетрудно исследовать развитие возмущений и в образцах конечных размеров, в частности, если теплоотвод в этом случае мал, то период осцилляций оказывается относительно большим (даже при $r \ll 1$). Подобная задача может быть решена и для сверхпроводников с $r \gg 1$.

В заключение отметим, что осцилляции разности потенциалов, наблюдавшиеся при исследовании скачков потока на фоне растущего с постоянной скоростью внешнего магнитного поля в работах [4,5], по-видимому, соответствуют случаю $r \lesssim 1$ и плохому охлаждению.

Я благодарен И.М.Руткевичу за полезное обсуждение работы.

Институт высоких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1 марта 1978 г.

Литература

[1] А.Кемпбелл, Дж.Иветс. Критические токи в сверхпроводниках, М., изд. Мир, 1970.

[2] Р.Г.Минц, А.Л.Рахманов. УФН, 121, 499, 1977.

[3] М.Г.Кремлев. Письма в ЖЭТФ, 17, 312, 1973.

[4] S.Shimamoto. Cryogenics, 14, 508, 1974.

[5] J.Chikaba. Cryogenics, 10, 306, 1970.