*Письма в ЖЭТФ, том 27, вып.8, стр. 473 – 475* *20 апреля 1978 г.*

# О КАНОНИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ ДЛЯ ТЕОРИЙ ПОЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ ЛАГРАНЖИАНАМИ

*В.К.Мальцев*

Предложен канонический формализм, использующий функцию Рауса в отличие от традиционного формализма, использующего функцию Гамильтона. В качестве неканонических координат выбраны компоненты поля, для которых в гамильтоновой теории сопряженные импульсы оказываются связанными. Получены уравнения Рауса для поля и аналог уравнения Шредингера для вектора состояния.

Как известно, в механике при канонической формулировке любой задачи можно рассматривать только некоторые координаты из всего их набора как канонические [1]. В этом случае вместо функции Гамильтона вводится функция Рауса, являющаяся гамильтоновой функцией по отношению к каноническим координатам и лагранжевой по отношению к остальным. Выбор канонических и неканонических координат определяется характером решаемой задачи. В теории поля обычно используется функция Гамильтона, но представляется более естественным использовать функцию Рауса в случае полевых теорий с сингулярными лагранжианами, рассматривая только "невырожденные" полевые компоненты как канонические координаты. При этом "вырожденные" импульсы вообще не появляются, и , следовательно, ограничения на них (первичные и производные от них связи) также не возникают.

Рассмотрим поле $\Phi^N = (\phi^N; \psi^N)$ с лагранжианом $\mathcal{L}$ таким, что определение импульса, сопряженного $\Phi^N$ при $\Phi^N = \phi^N$ ("невырожденные" компоненты) не приводит к связям, а при $\Phi^N = \psi^N$ ("вырожденные" компоненты) дает первичную связь. Будем считать только $\phi^N$ каноническими координатами. Сопряженные им импульсы суть

$$\pi_N = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}^N . \tag{1}$$

Для $\mathcal{R} \equiv \pi_N \dot{\phi}^N - \mathcal{L}$ имеем [1]

$$\delta \int \mathcal{R}\, d^4 x = \int [ \dot{\phi}^N \delta \pi_N - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^N} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^N_{,\alpha}} \right) \delta \phi^N - $$
$$- \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^N} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^N_{,k}} \right) \delta \psi^N ] \, d^4 x \quad ; \tag{2}$$

выражая $\mathcal{R}$ (плотность функции Рауса) через $\pi_N$, $\phi^N$, $\psi^N$ и *рассматривая эти переменные как независимые*, находим, что система

$$\dot{\phi}^N = \delta R / \delta \pi_N \ , \qquad \dot{\pi}_N = - \delta R / \delta \phi^N , \tag{3а}$$

$$(\delta / \delta \psi^N) \int R\, dt = 0 \tag{3б}$$

(функция Рауса $R \equiv \int \mathcal{R} d^3 x$ ) совпадает с уравнениями Лагранжа для $\Phi^N$, причем (3а) имеют явно канонический вид (функция Рауса $R$ – гамильтонова для $\phi^N$, $\pi_N$ и лагранжева для $\psi^N$); принцип Гамильтона может быть переписан в виде

$$\delta \int ( \pi_N \dot{\phi}^N - \mathcal{R} ) \, d^4 x = 0. \tag{3в}$$

В силу (3) для любой величины $A$ имеем

$$dA / dt = \partial^* A / \partial t + \{ R, A \} , \tag{4}$$

где $\partial^* A / \partial t$ берется при постоянных $\phi^N$ и $\pi_N$, а скобки Пуассона суть

$$\{ A, B \} \equiv \int d^3 x [ (\delta A / \delta \pi_N)(\delta B / \delta \phi^N) - (\delta B / \delta \pi_N)(\delta A / \delta \phi^N) ] . \tag{5}$$

---

[1] Принято, что $c = \hbar = 1$, $i, k = 0,1,2,3$, $\alpha, \beta = 1,2,3$, а также эйнштейновское правило суммирования.

При квантовании полагаем $\{A, B\} \to i[A, B]$, так что для $\phi^N$, $\pi_N$, $\psi^N$ единственный неисчезающий коммутатор есть

$$[\pi_N(\mathbf{x}, t), \phi^M(\mathbf{x}', t)] = -i\,\delta_N^M\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{6}$$

(вырожденные компоненты, следовательно, не квантуются).

Подчеркнем, что в силу независимости переменных не возникает вопрос о совместности (6) с уравнениями связей или о последовательности их раскрытия [2]. Разумеется, если $\phi^N$, $\pi_N$ рассматриваются как решение уравнений движения, то, не являясь в силу этого независимыми, они могут не удовлетворять каноническим соотношениям (6); например, в электродинамике (6) несовместно с уравнением $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, однако здесь нет противоречия, так как в данном формализме это уравнение не является связью; в классической механике это обстоятельство можно видеть уже на примере свободного движения частицы.

В заключение заметим, что в силу отсутствия в данном формализме функции Гамильтона уравнение Шредингера не может быть сформулировано. Как легко видеть из принципа соответствия, оно должно быть заменено на уравнение

$$(i\partial^*/\partial t - R)\,|\,\rangle = 0, \tag{7}$$

где $\partial^*/\partial t$ имеет тот же смысл, что и в (4), т.е. учитывает зависимость от времени как явную, так и через неквантованные компоненты $\psi^N$.

Автор благодарен М.А.Маркову за руководство его работой.

Институт ядерных исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 февраля 1978 г.

## Литература

[1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика, М., изд. Наука, 1965, стр. 168; Г.Гольдстейн. Классическая механика, М., изд.Наука, 1973, стр.243.

[2] П.А.М.Дирак.Лекции по квантовой механике, М., изд. Мир, 1968, стр. 16.