Письма в ЖЭТФ, том 80, вып. 8, с. 627 – 632

Конденсация фононов в квазиодномерных атомных газах с зависящими от времени параметрами

Л. А. Манакова[1)]

РНЦ "Курчатовский Институт", 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 июля 2004 г.

После переработки 23 сентября 2004 г.

Показано, что если в квазиодномерном бозе-газе амплитуда однородного периодического во времени изменения плотности превышает определенное критическое значение, то взаимодействия между звуковыми фононами приводят к формированию конденсата коррелированных фононных пар с энергией, равной половине частоты колебаний плотности газа.

PACS: 03.75.Fi, 05.30.Jp, 67.40.Db

I. В последние годы возобновился интерес к низкоразмерным, в частности, к одномерным системам в связи с созданием вырожденных квантовых газов в квазиодномерных магнитных и оптических ловушках. В частности, были получены атомные бозе-конденсаты в сильноанизотропных квазиодномерных ловушках (см., например,[1], а также обзор [2] и ссылки там). Большой интерес представляют свойства квантовых одномерных газов при изменении во времени их параметров (плотности или длины рассеяния). В экспериментальной работе [3] изменение с помощью магнитного поля частоты поперечного параболического потенциала в сильно анизотропной ловушке цилиндрической симметрии приводило к радиальным (поперечным) колебаниям конденсата как целого. Как было показано в работе [4], поперечные колебания конденсата порождают периодическое изменение скорости звука и, как следствие, параметрический резонанс, который приводит к переносу энергии в подсистему продольных (звуковых) мод. Также в работе [4] рассмотрены механизмы затухания поперечной моды, обусловленные параметрическим резонансом, при нулевой температуре, $T = 0$.

Однородное периодическое во времени изменение параметров бозе-газа (плотности, длины рассеяния или, что то же, скорости звука) приводит к рождению пар звуковых фононов с противоположными импульсами. Будем для определенности говорить о газе с зависящей от времени плотностью. В настоящей работе рассматривается ситуация, когда амплитуда колебаний плотности бозе-газа превышает определенное критическое значение. При этом числа заполнения звуковых фононов с энергией, равной половине частоты колебаний плотности (то есть, при выполнении условия параметрического резонанса), начинают экспоненциально расти со временем. Естественно предположить, что в этом случае становятся существенны взаимодействия между звуковыми фононами. Как показано ниже, в одномерных системах взаимодействия между фононами (ангармонизмы), в том числе, зависящие от их фаз, обусловлены: 1) флуктуациями плотности (наряду с флуктуациями фазы) в кинетической энергии одномерного бозе-газа; 2) конечностью радиуса взаимодействия между атомами в одномерной системе (по сравнению со взаимодействием нулевого радиуса в 3D). Отметим, что механизмы появления ангармонизмов и их роль в формировании основного состояния ранее не обсуждались в работах, посвященных 1D системам. В окрестности параметрического резонанса при $T = 0$ за счет взаимодействий образуется когерентное состояние звуковых фононов, в котором скоррелированы фазы фононов с противоположными импульсами. Таким образом, формируется конденсат коррелированных фононных пар вблизи энергии, равной половине частоты колебаний плотности бозе-газа. Эта величина в данной задаче играет роль химического потенциала для звуковых фононов. За счет существования фононных пар амплитуда колебаний плотности перенормируется таким образом, что числа заполнения звуковых фононов выходят на стационарные значения. В определенной области значений параметров результатом конденсации фононных пар является щель в спектре фононов при значении волнового вектора, пропорциональном частоте колебаний плотности. В новом состоянии имеет место стационарная периодическая модуляция продольной плотности бозе-газа с амплитудой, которая определяется числом фононных пар.

II. Рассмотрим механизмы временнóй модуляции параметров бозе-газа и связанную с этим неустойчи-

[1)]e-mail: manakova@kurm.polyn.kiae.su

вость. В отсутствие временно́й модуляции исходный гамильтониан одномерного бозе-газа со взаимодействием, как известно, имеет вид

$$
\begin{aligned}
H_B = \frac{\hbar^2}{2m}\int dx \partial_x \Psi^+(x)\partial_x \Psi(x) + \\
+\frac{1}{2}\int dx dx' \rho(x) U(x-x')\rho(x') + \int dx V(x)\rho(x), \\
\rho(x) = \Psi^+(x)\Psi(x); \quad [\Psi(x), \Psi^+(x')] = \delta(x-x').
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь $\Psi^+(x), \Psi(x)$ – бозонные операторы рождения и уничтожения для атомов; $V(x)$ – внешний потенциал; $U(x-x')$ – потенциал двухчастичного взаимодействия атомов. Запись гамильтониана в виде (1) означает, что рассматривается газ в сильно анизотропной ловушке, у которой продольный размер много больше поперечного радиуса. Рассмотрение с помощью 1D модели требует выполнения двух условий: $T \ll \omega_\perp$, $\mu < \omega_\perp$, $\omega_\perp$ – поперечная частота ловушки, μ – химический потенциал бозе-газа. В дальнейшем для простоты будет рассматриваться газ в ящике длиной $\mathcal{L}$ с периодическими граничными условиями. Подчеркнем, что предлагаемое в данной работе явление конденсации фононов не зависит от типа (периодические или открытые) граничных условий. Для дальнейшего удобно использовать описание 1D системы с помощью операторов фазы и плотности [5]. В этом представлении оператор бозонного поля $\Psi^+(x)$ записывается в виде

$$
\begin{aligned}
\Psi^+(x) = \sqrt{\rho(x)}e^{-i\theta(x)}; \quad \rho(x) = n + \frac{\partial_x \phi(x)}{\pi}; \\
[\partial_x \phi(x), \theta(y)] = i\pi\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{2}
$$

В [5] звуковой спектр получается, если в кинетической энергии пренебречь флуктуациями плотности, то есть положить в (2) $\rho(x) \approx n$. При этом (1) принимает вид известного гамильтониана модели Латтинжера:

$$
\begin{aligned}
H_B = \frac{\hbar}{2\pi}\int dx \Big[v_J(\partial_x\theta)^2 + v_N(\partial_x\phi)^2\Big]; \\
v_N = \frac{\partial_n \mu}{\pi\hbar}; \quad v_J = \frac{\pi\hbar n_s}{m};
\end{aligned} \tag{3}
$$

здесь n_s, $n = N/\mathcal{L}$ – сверхтекучая и полная средняя плотности в основном состоянии бозе-газа, соответственно, N – полное число частиц. Скорость звука определяется как $c_s = \sqrt{v_J v_N}$. Если определить операторы $\phi(x)$, $\theta(x)$ в виде

$$
\begin{aligned}
\phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\sqrt{\frac{2\pi}{\mathcal{L}|k|}}e^{-\delta|k|/2}\cdot(b_k^+ e^{-ikx} + b_k e^{ikx}); \\
\theta(x) = \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\sqrt{\frac{2\pi}{\mathcal{L}|k|}}e^{-\delta|k|/2}\times \\
\times \mathrm{sign}(k)(b_k^+ e^{-ikx} + b_k e^{ikx}),
\end{aligned} \tag{4}
$$

$[b_k, b_k^+] = 1$, то легко видеть, что форма гамильтониана H_B в (3) отвечает учету всех членов, билинейных по операторам $b_{\pm k}$, $b_{\pm k}^+$. (В (4) не выписаны так называемые нулевые моды, которые не понадобятся в данной задаче.)

Механизмы рождения пар фононов с помощью временно́й модуляции параметров бозе-газа обусловлены изменением посредством внешнего поля коэффициентов при билинейных членах вида $b_k^+ b_{-k}^+$ как в первом, так и во втором членах гамильтониана (3). В первом члене - это плотность бозе-газа, во втором – длина рассеяния a, $U(x-x') = U\delta(x-x')$, $U = 4\pi\hbar^2 a/m$. Предполагая, что при $T = 0$ $n_s \approx n$, введем однородную периодическую модуляцию плотности, $n = n_0 + n_1(t)$, $n_1(t) \sim \exp(-i\omega_0 t)$. Этот механизм может быть реализован с помощью соответствующего изменения со временем потенциала магнитной ловушки и эквивалентен введению в исходный гамильтониан (1) одномерного бозе-газа члена типа $\int dx \psi^+(x)V(t)\psi(x)$. Полагая, как обычно, $\psi(x) = \psi_0(x) + \delta\hat{\psi}(x)$, $\delta\hat{\psi}(x) = \sum_k [u_k(x)b_k + v_k(x)b_{-k}^+]$, получаем член $\int dx \delta\hat{\psi}(x)V(t)\delta\hat{\psi}(x)$, приводящий, в частности, к рождению пар возбуждений. В окрестности резонанса Фешбаха с помощью временной модуляции магнитного поля можно получить периодическое изменение со временем длины рассеяния, которое также приводит к рождению пар фононов в одномерном бозе-газе. Как известно [6], в этой области $a = a(B)$, B – магнитное поле. Полагая $B = B_0 + B_1(t)$, $B_1(t) \sim \exp(-i\omega_0 t)$, получаем $a_1(t) \sim \exp(-i\omega_0 t)$. Оба механизма дают в гамильтониан вклад типа

$$
H_p = \frac{1}{2}\sum_k \Big(E_0 e^{-i\omega_0 t} b_k^+ b_{-k}^+ + \mathrm{h.c.}\Big); \tag{5}
$$

здесь E_0 – величина, пропорциональная амплитуде изменяющегося со временем параметра бозе-газа (вообще говоря, эта величина может быть комплексной). В (5) выписаны только те члены, которые будут определяющими в дальнейшем рассмотрении. В данной работе рассматривается ситуация, когда E_0 – заданная величина. В дальнейшем для определенности под E_0 будем понимать амплитуду колебаний плотности бозе-газа как целого. Полный гамильтониан задачи имеет вид $H = H_B + H_p + H_{int}$, здесь H_B, H_p определены в (3), (5), H_{int} – взаимодействия между фононами, которые не учитываются в "гармоническом" приближении (3), но которые могут оказаться существенными для определения состояния системы, если амплитуда n_0 превышает критическое значение. Эти взаимодействия будут определены позже. Гамильтониан (3) диагонализуется с помощью канонического преобразования $\phi(x) = \sqrt{K}\phi'(x)$; $\theta(x) = (1/\sqrt{K})\theta'(x)$; $K = \sqrt{v_J/v_N} = e^{2\xi}$, так что в результате получается гамильтониан бозе-газа со звуковым спектром

$$H_B = \sum_{k\neq 0} c_s|k|\tilde{b}_k^+\tilde{b}_k. \qquad (6)$$

Поскольку в новом представлении $H_p \to \to \tilde{H}_p = (1/2)\sum_k[\tilde{E}_0\exp(-i\omega_0 t)\tilde{b}_k^+\tilde{b}_{-k}^+ + \text{h.c.}] +$ [нерезонансные члены] и взаимодействия также сохраняют свою форму, то в дальнейшем для простоты знак тильды у операторов и коэффициентов опускается. Без учета H_{int} система, описываемая гамильтонианом $H_0 = H_B + H_p$, имеет неустойчивость, обусловленную параметрическим резонансом. Действительно, уравнения движения для гейзенберговских операторов, $i(\partial b_k/\partial t) = [H, b_k]$, без учета H_{int} записываются в форме

$$\begin{gathered}\left[\frac{d}{dt} + \gamma_k + i(\omega_k - \omega_0/2)\right]a_k + iE_0a_{-k}^+ = 0;\\ \left[\frac{d}{dt} + \gamma_k - i(\omega_k - \omega_0/2)\right]a_{-k}^+ - iE_0^*a_k = 0;\\ b_k = a_k e^{-i\omega_0 t/2}.\end{gathered} \qquad (7)$$

Здесь γ_k – феноменологический параметр, описывающий затухание фононов. Из системы (7) следует, что $a_k(t), a_{-k}^+(t) \sim \exp(\alpha_k^{(0)}t)$, $\alpha_k^{(0)} = -\gamma_k + [|E_0|^2 + (\omega_k - \omega_0/2)^2]^{1/2}$. Таким образом, при $\omega_k = \omega_0/2$ и $|E_0| > \gamma_k$ числа заполнения звуковых фононов, порожденных колебаниями плотности, экспоненциально растут. Резонанс имеет место при значениях волнового вектора, определяемых соотношением $|k_0| = \omega_0/2c_s$. Отметим, что неучтенные в (5) члены, связывающие звуковые фононы с внешним возмущением, в окрестности резонанса дают несущественные в данном рассмотрении перенормировки.

III. Будем предполагать, что устойчивое состояние фононов при $|E_0| > \gamma_k$ формируется за счет взаимодействий между ними. Рассмотрим механизмы, которые порождают взаимодействия (ангармонизмы) в 1D системах.

Учтем в кинетической энергии гамильтониана (1) флуктуации плотности (а не только флуктуации фазы как в (3)). Для этого запишем бозонный оператор частиц в форме: $\Psi^+(x) = \sqrt{n + \partial_x\phi(x)} \cdot \exp(-i\theta(x)) \approx \approx [\sqrt{n} + (\partial_x\phi)/2\sqrt{n}]\exp(-i\theta(x))$. Учет второго слагаемого в предэкспоненте дает в кинетической энергии члены с $\int dx(\partial_x\phi)^2 \cdot (\partial_x\theta)^2$, $\int dx(\partial_x\phi)(\partial_x\theta)^2$ и т.д., отвечающие взаимодействиям между фононами. Используя выражения (4), мы получаем, что члены $\int dx(\partial_x\phi)^2 \cdot (\partial_x\theta)^2$, наряду с тривиальным взаимодействием типа плотность-плотность, содержат взаимодействие, зависящее от суммарной фазы двух фононов с противоположными импульсами, а именно,

$$H_{int}^{(2)} = \sum_{kk'}\mathcal{T}_{kk'}b_k^+b_{k'}^+b_kb_{k'} + \sum_{kk'}V_{kk'}b_{k'}^+b_{-k'}^+b_kb_{-k}. \qquad (8)$$

Члены $\int dx(\partial_x\phi)(\partial_x\theta)^2$ содержат комбинации из трех бозонных операторов. О таких членах пойдет речь ниже. Остальные члены несущественны в данной задаче.

Вторым источником взаимодействий между фононами является учет конечного радиуса взаимодействия $U(x-x')$ **в (1)**. В теории Гросса–Питаевского запись плотности энергии самосогласованного поля в виде $U|\Psi|^4 \sim n^2 \sim (\partial_x\phi)^2$ отвечает предположению о том, что радиус взаимодействия много меньше среднего расстояния между частицами, так что взаимодействие заменяется потенциалом нулевого радиуса. В низкоразмерных системах теория, основанная на потенциале нулевого радиуса, может быть неприменима [7]. Действительно, предполагая, что радиус взаимодействия порядка среднего расстояния между частицами, $R \sim n^{-1/d}$, d – размерность пространства, и записывая взаимодействие в виде $U(R) \sim U/R^d$, получаем в энергии самосогласованного поля лишнюю степень плотности, а именно, $U|\Psi|^4 n \sim n^3 \sim (\partial_x\phi)^3$. Аналогичный член появляется в кинетической энергии. Физически члены $\sim n^3 = |\Psi|^6$ отвечают тройным столкновениям частиц, роль которых должна увеличиваться с понижением размерности. Поскольку члены с $n^3 \sim (\partial_x\phi)^3$ содержат различные комбинации из трех бозонных операторов, то основные ангармонизмы могут быть записаны в виде $H_{int} = H_{int}^{(2)} + H_{int}^{(3)}$, $H_{int}^{(2)}$ – двухчастичные взаимодействия, определенные в (8), $H_{int}^{(3)}$ – все члены, содержащие комбинации из трех бозонных операторов. Если параметры системы таковы, что для трехчастичных процессов не могут быть выполнены законы сохранения энергии и импульса, то члены $H_{int}^{(3)}$ могут быть исключены из гамильтониана с помощью канонического преобразования. Во втором порядке теории возмущений они дают вклад в матричные элементы двухчастичных взаимодействий $H_{int}^{(2)}$. В этом случае $\gamma \sim \mathcal{O}(\mathcal{T}^2, V^2)$ (см. ниже (10), (12)). Если какие-либо трехчастичные процессы разрешены законами сохранения, то затухание определяется этими процессами. При нулевой температуре вероятность распада возбуждений с импульсом k и энергией ω_k, вычисленная с помощью золотого правила Ферми, дается выражением $\gamma \sim |V_3|^2(k^4/m^2c_s)$ [8]. В окрестности резонанса будем полагать $k \approx |k_0|$. В обоих случаях в дальнейшем рассматривается линейное затухание, которое не зависит от чисел заполнения фононных пар. Очевидно, что это справедливо при небольших превышениях над пороговым значением амплитуды E_0.

IV. Для того, чтобы определить спектр фононов при $T = 0$ с учетом взаимодействия, вычислим нормальную, $G(k,\omega)$, и аномальную, $F(k,\omega)$, функции Грина для фононов: $G(k,\omega) = -i < a_k a_k^+ >_\omega$; $F(k,\omega) = -i < a_k a_{-k} >_\omega$. Для системы с гамильтонианом $H = H_B + H_p + H_{int}^{(2)}$ уравнения движения для $G(k,\omega)$, $F(k,\omega)$ имеют вид

$$\begin{gathered}
(\omega - \omega_k - \Sigma)G(k,\omega) - \Delta_0 F^+(k,\omega) = 1;\\
(-\omega - \omega_k + \omega_0 - \Sigma^+)F(k,\omega) - \Delta_0^+ G(k,\omega) = 0;\\
\Sigma = 2i\mathcal{T}\int \frac{dk' d\omega'}{(2\pi)^2} G(k',\omega') + \mathcal{O}(\mathcal{T}^2, V^2);\\
\Delta_0 = E_0 + iV\int \tfrac{dk' d\omega'}{(2\pi)^2} F(k',\omega') + \mathcal{O}(\mathcal{T}^2, V^2);
\end{gathered} \tag{9}$$

здесь $\mathcal{O}(\mathcal{T}^2, V^2)$ обозначают члены, квадратичные по взаимодействию. Для простоты матричные элементы взаимодействия заменены их значениями при $k, k' = |k_0|$, так что $V_{kk'} \approx V_{|k_0|} \equiv V$, $T_{kk'} \approx T_{|k_0|} \equiv \mathcal{T}$. При этом решение уравнений (9) может быть представлено в форме

$$\begin{gathered}
G(k,\omega) = -\frac{(\omega - \omega_0/2) + \tilde{\xi}_k + i\gamma}{D(k,\omega)};\\
F(k,\omega) = \frac{\Delta_0}{D(-k,\bar{\omega})};\\
\tilde{\xi}_k = \tilde{\omega}_k - \omega_0/2; \quad \bar{\omega} \equiv (\omega_0 - \omega);\\
D(k,\omega) = -[(\omega - \omega_0/2)^2 - \tilde{\xi}_k^2] +\\
+\gamma^2 - |\Delta_0|^2 + 2i\gamma(\omega - \omega_0/2);\\
\tilde{\omega}_k = \omega_k + \mathrm{Re}\Sigma \equiv \omega_k + \mathcal{N}; \quad \gamma = \mathrm{Im}\Sigma.
\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь и ниже предполагается, что $\tilde{\omega}_k = \tilde{\omega}_{-k}$. Поскольку $i\int dk' d\omega G(k',\omega)$ – вещественная величина, то $\gamma \sim \mathcal{O}(\mathcal{T}^2, V^2)$. Для системы с гамильтонианом $H_{int} = H_{int}^{(2)} + H_{int}^{(3)}$ сначала вычисляется затухание, обусловленное членами $H_{int}^{(3)}$, которое затем подставляется в качестве параметра в полученное выше решение (10). В уравнениях (9) величина Δ_0 представляет собой новую амплитуду колебаний плотности бозе-газа, у которой модуль и фаза перенормированы за счет образования коррелированных фононных пар. В общем случае система уравнений для Δ_0, $\mathcal{N}$ в (9), имеющая вид

$$\begin{gathered}
\Delta_0 = E_0 + i\frac{V\Delta_0}{(2\pi)^2}\cdot J_1(\mathcal{N}, \Delta_0);\\
\mathcal{N} = \frac{-i\mathcal{T}}{2\pi^2 c_s}\int_{-\xi_0}^{\xi_0} d\xi_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\omega' + \tilde{\xi}_k + i\gamma)d\omega'}{D(\varepsilon_k, \omega')};\\
J_1 = -\frac{1}{c_s}\int_{-\xi_0}^{\xi_0} d\xi_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\omega'^2 - \varepsilon_k^2)d\omega'}{(\omega'^2 - \varepsilon_k^2)^2 + 4\gamma^2\omega'^2},
\end{gathered} \tag{11}$$

может быть решена только численно. Здесь $\varepsilon_k^2 = \tilde{\xi}_k^2 + \Delta_\gamma^2$; $\Delta_\gamma^2 = \gamma^2 - |\Delta_0|^2$, интегрирование по k заменено интегрированием по ξ_k с помощью соотношения $d|k| = d\xi_k/c_s$, $\omega' = \omega - \omega_0/2$, $\xi_0 = \min[\omega_0, \mu]$ – параметр обрезания в интегралах по ξ_k. Однако в зависимости от величины затухания звуковых фононов механизмы влияния фононных пар на формирование состояния системы за порогом неустойчивости качественным образом отличаются. По этой причине ниже будут рассмотрены два предельных случая, представляющие, по-видимому, наибольший физический интерес. **Первый случай** описывает ситуацию с конечным достаточно большим затуханием и малой перенормировкой частоты фононов за счет взаимодействия, что описывается неравенствами $\mathcal{N} \ll |\Delta_0| < \gamma$. В этом случае состояния фононов зависят от времени как $a_k, a_{-k}^+ \sim e^{\alpha_k t}$ с $\alpha_k = -\gamma + [|\Delta_0|^2 - (\tilde{\omega}_k - \omega_0/2)^2]^{1/2}$. Новое состояние с фононными парами может быть либо стационарным при $\tilde{\omega}_k - \omega_0/2 = 0$ и $|\Delta_0| = \gamma$, либо иметь аномально малый декремент при $\gamma - |\Delta_0| \ll \gamma$. В последнем случае решение системы (11) дает простые выражения:

$$J_1 = \frac{\pi\xi_0}{2\gamma c_s}; \ \Delta_0 = \frac{E_0}{1 - i(V\xi_0/8\pi\gamma c_s)}; \ \mathcal{N} = \frac{\mathcal{T}\xi_0}{2\pi c_s}. \tag{12}$$

(данные выражения получены в предположении, что $d\tilde{\xi} = d\xi$). Соотношение $\mathcal{N} \ll \gamma$ выполняется при $(\mathcal{T}/c_s) \ll (\gamma/\xi_0)$. При небольших превышениях амплитуды колебаний плотности над пороговым значением, $E_0 - E_{th} \ll E_{th} \equiv \gamma$, величина $\Delta_\gamma^2 = \gamma^2 - |\Delta_0|^2$ определяется выражением

$$\Delta_\gamma^2 = E_{th}^2 \Big[\Big(\frac{V\xi_0}{8\pi c_s E_{th}} \Big)^2 - \frac{E_0 - E_{th}}{E_{th}} \Big]. \qquad (13)$$

Подчеркнем, что выше порогового значения амплитуды решение с $\Delta_\gamma^2 > 0$ существует только при достаточно больших значениях взаимодействия V.

Второй случай отвечает ситуации с большой перенормировкой частоты за счет взаимодействия, не зависящего от фаз фононов, и малому затуханию, а именно, $\mathcal{N} > |\Delta_0| \gg \gamma$. В этом случае $\alpha_k = -i[(\omega_k - \omega_0/2)^2 + 2\mathcal{N}(\omega_k - \omega_0/2) + (\mathcal{N}^2 - |\Delta_0|^2)]^{1/2} - 0^+$ и мы имеем стационарное состояние фононов со щелью в спектре, $\Delta^2 = \mathcal{N}^2 - |\Delta_0|^2$, для значений импульсов, определяемых равенствами $(\omega_k - \omega_0/2) = 0$ и $(\omega_k - \omega_0/2) = -2\mathcal{N}$. Чтобы получить решения для Δ_0, $\mathcal{N}$ в этом случае в уравнения (11) подставляем $\tilde{\xi}_k = \xi_k + \mathcal{N}$ и интегрируем по ξ_k. Когда щель мала, а именно, при $\mathcal{N} - |\Delta_0| \ll \mathcal{N}$, получаем следующее выражение:

$$\Delta^2 = \mathcal{N}^2 - \frac{E_0^2}{[1 + (V/4\pi c_s)\ln(1 - 4\pi\mathcal{T}/c_s)^{-1}]^2}. \qquad (14)$$

Из этого выражения следует, что пороговое значение для амплитуды E_0 определяется в данном случае перенормировкой частоты звуковых мод, обусловленной взаимодействием типа “плотность-плотность”, $E_{th} \equiv \mathcal{N}$. В частности, для небольших превышений амплитуды над пороговым значением, а именно, при $(E_0 - E_{th})/E_{th} \ll 1$ щель в спектре фононов равна

$$\Delta^2 = E_{th}^2 \Big[\Big(\frac{V}{2\pi c_s} \Big) \ln(1 - 4\pi\mathcal{T}/c_s)^{-1} - \frac{E_0 - E_{th}}{E_{th}} \Big]. \qquad (15)$$

Подчеркнем, что существование щели выше порогового значения амплитуды колебаний плотности возможно только при конечных значениях взаимодействия, зависящего от суммарной фазы фононов.

Следует также отметить, что при $\gamma \ll \mathcal{N} \ll \Delta_0$ решение с $\Delta_0 \neq 0$ абсолютно неустойчиво. Иными словами, в соответствующей области значений параметров предлагаемый в данной работе механизм не приводит к формированию устойчивого состояния.

Приведем соотношения, определяющие пределы применимости предлагаемой теории в случае бозе-газа. Прежде всего, определим допустимый верхний предел для частоты ω_0 колебаний плотности. Введенный выше волновой вектор k_0 следующим образом выражается через параметры бозе-газа: $|k_0| \sim \omega_0/c_s = (\omega_0/v_J) \cdot K$. Длинноволновое приближение, которое описывается гамильтонианом (3), справедливо, когда выполняется условие $|k_0|/n \ll 1$. Как следствие, частота колебаний плотности ограничена сверху следующим неравенством $\omega_0/v_J n \ll K^{-1}$. Для слабо неидеального бозе-газа $K \gg 1$, значения $K \to 1$ отвечают случаю сильного взаимодействия в бозе-газе [5]. Так как $v_J n \sim \mu < \omega_\perp$, то, например, для $\omega_\perp \sim 10^4\,\text{c}^{-1}$ и $K \sim 1 \div 100$, частота колебаний плотности может меняться в пределах: $\omega_0 \sim (10^3 \div 10)\,\text{c}^{-1}$. В свою очередь, для отношения (V/c_s), которое определяет существование решений выше порога, имеет место оценка: $V/c_s \sim V/v_J \cdot K$. Неравенство $V/v_J \ll 1$ есть условие применимости теории (левая часть – параметр, характеризующий отклонение от “гармонического” приближения). Для слабовзаимодействующего бозе-газа отношение V/c_s может быть как много меньше, так и много больше единицы в зависимости от того, насколько велико K (или, что то же, слабо взаимодействие между атомами). Из совместности полученных условий на величины ω_0 и V/c_s , следует, что в случае бозе-газа полученные в данной работе состояния, скорее всего, могут быть реализованы для газов с промежуточными значениями, $K \sim 10$, когда ω_0 не слишком мала, тогда как отношение V/c_s все еще может меняться в достаточно широких пределах. Согласно имеющимся в литературе экспериментальным значениям параметров квазиодномерных атомных бозе-газов, подходящие значения $K \approx 30$ имеет бозе-газ из атомов Na с числом частиц $N = 10^4$ и $U_{\text{eff}}/n_0 = 10^{-2}$, $U_{\text{eff}} \sim a/l_\perp^2$, $K = \sqrt{n_0/mU_{\text{eff}}}$, $l_\perp$ – поперечный размер ловушки.

Однокомпонентный ферми газ с отталкивательным взаимодействием в одномерной ловушке также описывается гамильтонианом (6). В этом случае $0 \le K \le 1$ [5] и для достаточно малых значений K частота ω_0 может меняться в существенно более широких пределах, чем для бозе-газа. При этом $V/c_s \ll 1$. Таким образом, в случае бесспиновых фермионов полученные выше состояния могут быть реализованы практически для любых значений $K \le 1$.

Проведенное выше рассмотрение предполагало, что исходный спектр фононов в (6) непрерывен. Это налагает определенные ограничения на продольный размер реальной квазиодномерной ловушки. Расстояние между уровнями продольного квантования $\Delta\omega \sim c_s/\mathcal{L}$ должно быть существенно меньше величины, полученной выше щели в спектре фононов Δ_γ, Δ. Таким образом, предложенный механизм конденсации фононных пар может наблюдаться в квазиодномерных ловушках, продольный размер которых удовлетворяет условиям $\mathcal{L} \gg c_s/(\Delta_\gamma, \Delta)$.

Я благодарна Ю.М.Кагану за обсуждения и критические замечания. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

---

1. M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 160405 (2001).
2. M. A. Cazalilla, cond-mat/0307033.
3. F. Chevy, V. Bretin, P. Rosenbusch et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 250402 (2002).
4. Yu. Kagan and L. A. Maksimov, Phys. Rev. **A64**, 053610 (2001).
5. F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **47**, 1840 (1981).
6. J. L. Roberts, N. R. Claussen, S. L. Cornish et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 4211 (2001).
7. T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **105**, 1119 (1957).
8. A. Ricati, P. O. Fedichev, W. Zweger, and P. Zoller, cond-mat/0212195.