Письма в ЖЭТФ, том 21, вып. 8, стр. 469 – 472 20 апреля 1975 г.

РАСПАД НАЧАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ТИПА СТУПЕНЬКИ В УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА–де Вриза

Е.Я.Хруслов

Получены точные формулы, позволяющие находить эволюцию возмущения во времени методами обратной задачи рассеяния. Для больших времен найдена асимптотика решения в окрестности фронта волны.

Как известно, процессы в бездиссипативных нелинейных средах со слабой дисперсией описываются уравнением Кортевега-де Вриза (КдВ), которое в приведенной форме имеет вид: $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$. В случае начальных возмущений $u(x, 0)$, достаточно быстро убывающих при $x \to \pm\infty$, в работе [1] была открыта замечательная процедура интегрирования этого уравнения, использующая обратную задачу рассеяния. Представляет интерес изучение эволюции во времени начальных возмущений $u(x, 0)$ типа ступеньки, т. е. $u(x, 0) \to -c^2 (c > 0)$ при $x \to -\infty$ и $u(x, 0) \to 0$ при $x \to +\infty$. Такая задача впервые рассматривалась в работах [2,3], где приближенным (квазиклассическим) методом Уитема найдена асимптотика решения при $t \to +\infty$. В данной статье эта задача решается с использованием идей работы [1]: получены точные формулы для преобразования данных рассеяния по времени, позволяющие находить решение $u(x, t)$ при любых t с помощью линейных интегральных уравнений теории рассеяния, а в области $x > 4c^2 t - (2c)^{-1} \ln t^N$, содержащей фронт волны, найдена асимптотика $(u(x, t)$ при $t \to +\infty$.

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-y'' + vy = k^2 y \tag{1}$$

с потенциалом $v = v(x)$ достаточно быстро стремящимся к 0 при $x \to -\infty$ и к c^2 при $x \to +\infty$. Пусть $\psi_1(x, k)$ и $\psi_2(x, k)$ – решения уравнения (1) с асимптотиками

$$\psi_1(x, k) \sim \begin{cases} \exp[ikx] + S_{21}(k)\exp[-ikx], & x \to -\infty \\ S_{22}(k)\exp[ik_1 x], & x \to +\infty \end{cases}$$

$$\psi_2(x, k) \sim \begin{cases} S_{11}(k)\exp[-ik_1 x], & x \to -\infty \\ \exp[-ik_1 x] + S_{12}(k)\exp[ik_1 x], & x \to +\infty, \quad (|k| > c), \end{cases}$$

где $\mathrm{Im} k = 0$, $k_1 = \sqrt{k^2 - c^2}$, причем выбрана ветвь корня в плоскости k с разрезом $[-c, c]$ и условием $k_1 > 0$ при $k > c$. Матрица рассеяния $\| S_{ij}(k) \|$ обладает определенными свойствами, позволяющими восстановить ее по коэффициенту $S_{21}(k)$ и собственным значением уравнения (1). Пусть $-\kappa_l^2$ ($l = 1,2\ldots m$) – собственные значения (1), а $m_l^{(1,2)} = \| f_l^{(1,2)} \|^{-2}$, где $f_l^{(1,2)}(x)$ – собственные функции, фиксированные условиями на бесконечности: $f_l^{(1)}(x) \sim \exp[-\sqrt{\kappa_l^2 + c^2}x]$ $(x \to +\infty)$, $f_l^{(2)}(x) \sim \exp[\kappa_l x] (x \to -\infty)$.

Эти характеристики являются исходными данными обратной задачи рассеяния, и по ним можно восстановить потенциал $v(x)$. Соответствующий формализм был развит в работе [4] для случая $v(x) \to +c^2 (x \to -\infty)$ $v(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$. Методика этой работы полностью переносится на рассматриваемый здесь случай. Именно, потенциал $v(x)$ может быть найден по любой из формул

$$v(x) = c^2 - 2\frac{d}{dx}A_1(x, x) = 2\frac{d}{dx}A_2(x, x), \tag{2}$$

где $A_1(x, y)$, $A_2(x, y)$, как функции от y (x – параметр), удовлетворяют интегральным уравнениям

$$A_1(x, y) + \int_x^\infty \Omega_1(\eta + y)A_1(x, \eta)\,d\eta + \Omega_1(x + y) = 0, \qquad (y > x), \tag{3}$$

$$A_2(x, y) + \int_{-\infty}^x \Omega_2(\eta + y)A_2(x, \eta)\,d\eta + \Omega_2(x + y) = 0, \qquad (y < x) \tag{4}$$

с такими ядрами

$$\Omega_1(z) = \sum_{l=1}^m m_l^{(1)} \exp[-\sqrt{\kappa_l^2 + c^2}z] + \frac{1}{2\pi}\int_0^c |S_{22}(k)|^2 \exp[-\sqrt{c^2 - k^2}z]dk +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty S_{12}(k)\exp[ik_1 z]dk_1, \tag{3 }$$

$$\Omega_2(z) = \sum_{l=1}^{m} m_l^{(2)} \exp[\kappa_l z] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{21}(k) \exp[-ikz] dk. \qquad (4')$$

Предположим теперь, что потенциал $v = v(x)$ зависит от времени и удовлетворяет уравнению КдВ. Тогда, рассуждая в существенном также, как в работе [1], можно показать, что данные рассеяния меняются во времени по такому закону:

$$S_{21}(k, t) = S_{21}(k)\exp[-8ik^3t]; \quad S_{12}(k,t) = S_{12}(k)\exp[ik_1(8k^2+4c^2)t]$$

$$(|k| > c);$$

$$S_{22}(k, t) = S_{22}(k)\exp[-\sqrt{c^2-k^2}(4k^2+2c^2)t - 4ik^3t] \qquad (|k| < c); \ (5)$$

$$\kappa_l(t) = \kappa_l; \ m_l^{(2)}(t) = m_l^{(2)}\exp[-8\kappa_l^3 t]; \quad m_l^{(1)}(t) = m_l^{(1)}\exp[\sqrt{\kappa_l^2+c^2}(8\kappa_l^2-4c^2)t]$$

Формулы (1) – (5) позволяют находить решение $v(x, t)$ уравнения КдВ с начальными данными $v(x, 0)$, имеющими асимптотику: $v(x, 0) \to 0$ $(x \to -\infty)$, $v(x, 0) \to +c^2 (x \to +\infty)$. Если положить $v(x, 0) = u(x, 0) + c^2$, то решение исходной задачи можно определить по $v(x, t)$ с помощью преобразования: $u(x,t) = v(x - 6c^2t, t) - c^2$. В результате для $u(x, t)$ очевидным образом получаются формулы, аналогичные (2), и интегральные уравнения (3), (4) с ядрами $\Omega_{1,2}(z, t)$, явно зависящими от времени. Уравнение (3) оказывается более удобным для изучения асимптотики $u(x, t)$ при $t \to +\infty$ и при больших положительных x. Рассмотрим случай, когда уравнение (1) не имеет дискретного спектра $(m = 0)$. Пусть $x > 4c^2t - (2c)^{-1}\ln t^{n+1}$, где $n > 0$ – любое целое число. В этой области ядро $\Omega_1(z, t)$ достаточно точно аппроксимируется конечным числом членов $(\geqslant n)$ своей асимптотики при $t \to \infty$, что позволяет свести задачу к решению интегрального уравнения (3) с вырожденным ядром. В результате после соответствующих оценок получаем следующую формулу для $u(x, t)$ в области $x > 4c^2t - (2c)^{-1}\ln t^{n+1}$:

$$u(x, t) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln\det\{E + A(x, t)\} + o(t^{-1/4}), \qquad (6)$$

где E – единичная матрица порядка n, $A(x, t)$ – матрица с элементами

$$A_{ik}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| S'_{22}(0) \right|^2 c^{2+i-k} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(2i+2j)!}{(i-1)!\,j!\,(i+j)!} (64c^3t)^{-i-j-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int_{cx-4c^3t}^{\infty} \xi \exp[-2\xi] d\xi.$$

Анализ формулы (6) показывает, что в этой области решение $u(x,t)$ при $t \to \infty$ распадается на $[(n+1)/2]$ солитонов, самый быстрый из которых имеет вид ($x > 4c^2 t - (2c)^{-1} \ln t^3$)

$$u(x,t) \sim -2c^2 \operatorname{ch}^{-2}\left(cx - 4c^3 t + \frac{1}{2}\ln\frac{256\sqrt{2\pi}\,(c^3 t)^{3/2}}{|S'_{22}(0)|^2 c^2}\right).$$

Расстояние между соседними солитонами растет, как $\ln t^{1/c}$, что согласуется с [2,3].

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27 февраля 1975 г.

Литература

[1] C.Gardner, J.Green, M.Kruskal, R.Miura. Phys. Rev. Lett., 16, 1095, 1967.

[2] А.В.Гуревич, Л.П.Питаевский. Письма в ЖЭТФ, 17, 268, 1973.

[3] А.В.Гуревич, Л.П.Питаевский. ЖЭТФ, 65, 590, 1973.

[4] В.Буслаев, В.Фомин, Вестник ЛГУ, №1, 1, 56, 1962.