Письма в ЖЭТФ, том 21, вып. 10, стр. 612 – 614   20 мая 1975 г.

О РАСШИРЕНИЯХ АЛГЕБРЫ ПУАНКАРЕ СПИНОРНЫМИ ГЕНЕРАТОРАМИ

Б.Г.Конопельченко

Рассмотрена структура возможных нетривиальных расширений алгебры Пуанкаре произвольными спинорными генераторами.

В последнее время значительный интерес вызывают алгебры симметрии, содержащие спинорные генераторы. В работах [1 – 4] были рассмотрены расширения алгебры Пуанкаре генераторами, преобразующимися по двурядным спинорным представлениям группы Лоренца (представлениям $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$).

В настоящей работе мы рассмотрим возможные нетривиальные расширения алгебры Пуанкаре произвольными спинорными генераторами, т. е. алгебры S, состоящие из генераторов лоренцевских преобразований J_{AB}, $J_{\dot{A}\dot{B}}$, сдвигов $P_{A\dot{B}}$ и спинорных генераторов $Q^{(j,k)}_{A_1\ldots A_{2j}\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2k}}$, преобразующихся по неприводимым представлениям (j, k) группы Лоренца ($j + k$ – полуцелое)[1].

Для сохранения правильной связи спина со статистикой алгебра S должна содержать антикоммутаторы между спинорными генераторами.

Из структуры разложений прямых произведений представлений группы Лоренца на прямые суммы следует, что для того, чтобы быть нетривиальным расширением алгебры Пуанкаре алгебра S должна содержать, по крайней мере, два спинорных генератора $Q^{(j,k)}$ и $\bar{Q}^{(j',k')}$, для которых должны выполняться соотношения $|j - j'| = \frac{1}{2}$, $|k - k'| = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим алгебры $S^{(j)}$, содержащие спинорные генераторы $Q^{(j,k)}$ и $\bar{Q}^{(k,j)}$ (т. е. $Q^{(j,j-1/2)}$ и $\bar{Q}^{(j-1/2,j)}$).

Из обобщенных тождеств Якоби вытекает, что возможны только три следующих типа алгебр $S^{(j)}(j > 1/2)$ (мы не выписываем стандартные перестановочные соотношения для J, P):

$$\text{I}\qquad [P_{A\dot{B}}, Q^{(j,j-1/2)}_{A_1\ldots A_{2j}\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2j-1}}] = a\,\underset{(A_1,\ldots,A_{2j})}{Sym}\,\epsilon_{AA_1}\bar{Q}^{(j-1/2,j)}_{A_2\ldots A_{2j}\dot{B}\dot{B}_1\ldots\dot{B}_{2j-1}},$$

$$[P, \bar{Q}^{(j-1/2,j)}] = 0, \qquad \{Q^{(j,j-1/2)}, Q^{(j,j-1/2)}\} = 0,$$

$$\{Q^{(j,j-1/2)}, \bar{Q}^{(j-1/2,j)}\} = 0, \qquad \{\bar{Q}^{(j-1/2,j)}, \bar{Q}^{(j-1/2,j)}\} = 0.$$

---

[1] Мы используем спинорные обозначения: $A, B = 1,2$, $\dot{A}, \dot{B} = \dot{1},\dot{2}$. Неприводимые величины (например, J и Q) симметричны по индексам с точками и без точек.

II $[P_{A\dot B}, \bar Q^{(j-\frac12, j)}_{A_1\ldots A_{2j-1}\dot B_1\ldots\dot B_{2j}}] = a \underset{(B_1\ldots, B_{2j})}{Sym}\, \epsilon_{\dot B\dot B_1} Q^{(j,\, j-\frac12)}_{AA_1\ldots A_{2j-1}\dot B_2\ldots\dot B_{2j}}$

$$[P, Q]=0, \qquad \{Q, Q\}=0,$$

$$\{Q, \bar Q\}=0, \qquad \{\bar Q, \bar Q\}=0,$$

III

$$[P, Q]=0, \quad [P, \bar Q]=0, \quad \{Q, Q\}=0, \quad \{\bar Q, \bar Q\}=0,$$

$$\{Q_{A_1\ldots A_{2j}\dot B_1\ldots\dot B_{2j-1}}, \bar Q_{C_1\ldots C_{2j-1}\dot D_1\ldots\dot D_{2j}}\} =$$

$$= b \underset{(A,B,C,D)}{Sym}\, \epsilon_{A_1C_1}\ldots \epsilon_{A_{2j-1}C_{2j-1}}\epsilon_{\dot B_1\dot D_1}\ldots\epsilon_{\dot B_{2j-1}\dot D_{2j-1}} P_{A_{2j}\dot D_{2j}},$$

где Sym обозначает симметризацию по соответствующим индексам, $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$, $\epsilon_{\dot A\dot B} = -\epsilon_{\dot B\dot A}$ и a, b – произвольные числа. Мы опускаем спинорные индексы там, где это не может вызвать недоразумений.

В случае $j = 1/2$ возможны два типа алгебр:

I $\quad [P_{A\dot B}, Q_C] = a\epsilon_{AC}\bar Q_{\dot B}\,; \qquad [P_{A\dot B}, \bar Q_{\dot C}] = 0\,,$

$$\{Q_A, \bar Q_{\dot B}\} = bP_{A\dot B}, \quad \{Q_A, Q_B\} = abJ_{AB}, \quad \{\bar Q_{\dot A}, \bar Q_{\dot B}\} = 0.$$

II $\quad [P_{A\dot B}, Q_C] = 0, \quad [P_{A\dot B}, \bar Q_{\dot C}] = a\epsilon_{\dot B\dot C}Q_A,$

$$\{Q_A, \bar Q_{\dot B}\} = bP_{A\dot B}, \quad \{Q_A, Q_B\} = 0, \quad \{\bar Q_{\dot A}, \bar Q_{\dot B}\} = abJ_{\dot A\dot B}.$$

Мы видим, что в этом случае не только $P_{A\dot B}$, но и J_{AB} (или $J_{\dot A\dot B}$) являются билинейными комбинациями спинорных генераторов.

Отметим, что для всех допустимых алгебр $S^{(j)}[P, [P, Q]] = 0$. В результате для любой конечной алгебры, содержащей в качестве подалгебры алгебру $S^{(j, j-\frac12)}$ и не содержащей других спинорных генераторов, справедлива обобщенная теорема О'Раферти, доказанная для случая $j = 1/2$ в [5].

Для алгебр $S^{(j, j-\frac12)}$ типа I и II P^2 не является инвариантом, и поэтому только алгебра типа III (для $j = 1/2$, $a = 0$) может рассматриваться как возможная алгебра симметрии теорий, описывающих взаимодействие частиц. Приведем основные результаты. Алгебра III может быть реализована как алгебра группы преобразований $4 \cdot 4j(2j-1)$-мерного суперпространства с координатами $X_{A\dot B}$ и $\theta_{A_1\ldots A_{2j}\dot B_1\ldots\dot B_{2j-1}}$, $\bar\theta_{C_1\ldots C_{2j-1}\dot D_1\ldots\dot D_{2j}}$ ($X_{A\dot B}$ – координаты пространства Минковского, $\theta(\bar\theta)$ – антикоммутирующие спиноры):

$$\theta \to \theta + \xi\,, \qquad \bar\theta \to \bar\theta + \bar\xi\,,$$

$$X_{A\dot B} \to X_{A\dot B} - i\frac{b}{2}(1+f)\xi_{AA_2\ldots A_{2j}\dot B_1\ldots\dot B_{2j-1}}\bar\theta_{A_2\ldots A_{2j}\dot B\dot B_1\ldots\dot B_{2j-1}} +$$

$$+ i\frac{b}{2}(1-f)\theta_{AA_2\ldots A_{2j}\dot B_1\ldots\dot B_{2j-1}}\bar\xi_{A_2\ldots A_{2j}\dot B\dot B_1\ldots\dot B_{2j-1}},$$

где ξ – антикоммутирующий спинор, f – произвольное число.

Аналогично случаю $j = 1/2$ вводятся суперполя $\psi(X, \theta, \bar\theta)$, преобразующиеся по представлениям рассматриваемой группы. Неприводимые суперполя классифицируются по значениям величины Y ($Y = 0$, $1/2$, 1, $3/2$ .....,) и эквивалентны набору обычных полей со спектром спинов

$$Y - j(4j-1),\ Y - j(4j-1) + \frac{1}{2}, \ldots, Y - \frac{1}{2}, Y, Y + \frac{1}{2}, \ldots,$$

$$Y + j(4j-1) - \frac{1}{2},\quad Y + j(4j-1).$$

Используя технику суперполей, подобно случаю $j = 1/2$, можно построить ряд моделей инвариантных относительно рассматриваемой группы. Для этих моделей характерно наличие большого числа сокращений расходимостей, а также присутствие полей (в частности, калибровочных) с высокими целыми и полуцелыми спинами. Таким образом, алгебры $S^{(j)}$ с $j > 1/2$ представляют интерес для описания взаимодействия полей с высокими спинами.

В заключение отметим, что аналогичным образом можно рассмотреть алгебры S, содержащие α) спинорные генераторы с $j' \neq k$ и $k' \neq j$, β) несколько спинорных генераторов с различными j и k, γ) спинорные генераторы, преобразующиеся по приводимым представлениям группы Лоренца (например, $(1/2, 1/2)^n \otimes (1/2, 0)$). В этих случаях обнаруживается ряд интересных особенностей.

Автор благодарен Ю.Б.Румеру за полезные обсуждения.

Институт ядерной физики
Сибирское отделение
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 апреля 1975 г.

Литература

[1] Ю.А.Гольфанд. Е.П.Лихтман. Письма в ЖЭТФ, 13, 452, 1971; Сб. Проблемы теоретической физики. Памяти И.Е.Тамма, М., изд. Наука, 1972.

[2] G.Wess, B.Zumino. Nucl. Phys., B70, 39, 1974; Phys. Lett., B49, 52, 1974.

[3] A.Salam, G.Strathdee. Nucl. Phys. B76, 477, 1974; Phys. Lett., B51, 353, 1974.

[4] B.Zumino. In Proc. XVII Intern. Conf. High. Energy Phys., 1974.

[5] Б.Г.Конопельченко. Письма в ЖЭТФ, 20, 684, 1974.