Письма в ЖЭТФ, том 21, вып. 10, стр. 621 – 624 20 мая 1975 г.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Н.Н.Мейман

В работе дается локализация спектра оператора $L = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x)$ с комплексным периодическим потенциалом $u(x)$. Получены формулы разложения суммируемых на $(-\infty, \infty)$ функций по собственным функциям оператора и равенства Парсеваля.

1. В рамках потенциальной модели рассеяния с поглощением энергии потенциал $u(x)$ является комплексным, а в среде с кристаллической структурой и периодическим. Это объясняет необходимость решения задачи о разложении по собственным функциям оператора Шредингера $L_u = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x)$ с комплексным периодическим потенциалом $u(x) = u(x + r)$.

Как известно, спектр оператора с непрерывным периодическим вещественным потенциалом состоит из бесконечной полупрямой $E \geqslant E_0$, из которой удалено бесконечное или конечное число запрещенных интервалов (лакун).

Пусть E – точка непрерывного спектра, $\phi_{1,2}(x; E)$ – некоторая фундаментальная система решений уравнения $(L - E)\phi = 0$ и $T(E)$ – матрица монодромии

$$T(E) = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}, \quad \phi_i(x + r) = a_{i1}\phi_1(x) + a_{i2}\phi_2(x), \quad i = 1;2 \quad (1)$$

$\mathrm{Sp}\,T(E)$ и собственные числа $\rho_{1,2}(E)$ не зависят от выбора базиса $\phi_{1,2}(x;\ E)$. $F(E) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,T(E)$ является целой функцией и асимптотически ведет себя, как $\cos r\sqrt{E}$. Так как $\det T(E) = 1$, то

$$\rho_{1,2}(E) = F(E) \pm i\sqrt{1 - F^2(E)}. \tag{2}$$

Принадлежность точки E непрерывному спектру означает ограниченность по всей оси всех решений уравнения $(L - E)\phi = 0$. Это равносильно равенству $|\rho_{1,2}(E)| = 1$. Так как $\rho_1\rho_2 = 1$, то отсюда следует $\rho_{1,2}(E) = \exp[ip(E)r]$, где $p(E)$ вещественный квазиимпульс. Сравнение с (2) дает:

$$F(E) = \cos r\, p(E), \qquad \mathrm{Im}F(E), \qquad |F(E)| \leqslant 1,$$
$$r\,p(E) = i\ln[F(E) - i\sqrt{1 - F^2(E)}] \tag{3}$$

(знак корня такой, что при $E \to -\infty$ $r\,p(E) \sim i\ln 2F(E)$). Вывод соотношений (4) не зависит от вещественности потенциала $u(x)$, т. е. доказано общее утверждение.

Спектр оператора $L = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x)$ с вещественным или комплексным потенциалом совпадает с множеством

$$\mu(E:\ \mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}\,T(E) = 0, \qquad |\mathrm{Sp}\,T(E)| \leqslant 2). \tag{4}$$

Грубая асимптотика $\mathrm{Sp}\,T(E)$ не зависит от вещественности потенциала, поэтому структура спектра μ асимптотически та же, что и при вещественном потенциале. Существенно, что плоскость с удаленным спектром остается связной, так как μ не может содержать замкнутые кривые. Множества такого рода детально исследованы в работе [1].

2. Знание спектра дает возможность получить следующую теорему о разложении по собственным функциям.

Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L(-\infty,\ \infty)$ и имеет ограниченную вариацию в окрестности точки x, тогда

$$f(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mu} \frac{\phi(E)\,dE}{\sqrt{1 - F^2(E)}}\,[\psi_1(x;\ E)h_2(E) + \psi_2(x;\ E)h_1(E)]\,dE. \tag{5}$$

Здесь $\psi_i(x;\ E)$ — функция Блоха оператора L.

$$h_i(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(x;\ E) f(x)\,dx, \qquad i = 1, 2. \tag{6}$$

Функция $\phi(E) = \phi(r;\ E)$, где $\phi(x;\ E)$ — решение уравнения $(L - E)\phi = 0$ с начальными условиями $\phi(0;\ E) = 0$, $\phi'(0;\ E) = 1$. Интегрирование в (5) происходит по μ, как по разрезу, т. е. по обоим берегам каждой дуги, входящей в μ. Функция $\sqrt{1 - F^2(E)}$ однозначна в плоскости с удаленным спектром μ и знак корня определяется условием $\sqrt{1-F^2(E)} \sim -iF(E)$ при $E \to -\infty$.

Для вещественного потенциала формула (5) является преобразованием формулы (21,6,3) из [2]. Доказательство, приведенное в [2], целиком базируется на асимптотике $F(E)$ и $\psi_{1,2}(x;\, E)$, которые не меняются при комплексном потенциале, что и доказывает представление (5).

Непосредственно из (5) следует равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mu} \frac{\phi(E)\,dE}{\sqrt{1-F^2(E)}}\, h_1(E)\,h_2(E). \qquad (7)$$

Преобразуем формулы (5 – 7) к виду близкому преобразованию Фурье. Спектр μ лежит на одной ветви кривой $\mathrm{Im}F(E)=0$ и E_0 его начало. Проведем из точки E_0 разрез по этой кривой. Функция $p(E)$ (см. (3)) конформно отображает плоскость E с разрезом на полуплоскость $\mathrm{Im}\,p > 0$ с вертикальными конечными разрезами, выходящими из точек кратных π. Образ спектра μ заполняет всю вещественную ось и точкам спектра $E_{\pm}$ на противоположных берегах соответствуют точки $\pm p$. Как известно,

$$\psi_{1,2}(x;\, E) = \exp(\pm ip(E)x)\,\chi_{1,2}(x;\, E), \qquad \chi(x+\tau;\, E) = \chi(x;\, E). \qquad (8)$$

Легко убедиться, что $\psi_{1,2}(x;\, E)$ в (8) – значения одной и той же аналитической по E функции $\psi(x,\, E)$ на разных берегах разреза. Аналогично для $\chi_{1,2}(x;\, E)$. Выразим E через p: $E=E(p)$. Через $\hat{\psi}(x;\, p)$ и $\hat{\chi}(x;\, p)$ обозначим функции $\psi(x;\, E)$, $\chi(x;\, E)$, выраженные через p. В переменной p формулы (5 – 7) примут вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \frac{\phi[E(p)]}{F'[E(p)]}\, e^{ipx}\,\hat{\chi}(x;\, p)\,\tilde{f}(-p), \qquad (9)$$

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixp}\,\hat{\chi}(x;\, p)\,f(x)\,dx\,, \qquad (10)$$

$$\int f^2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \frac{\phi[E(p)]}{F'[E(p)]}\,\tilde{f}(-p)\,\tilde{f}(p) \qquad (11)$$

При $p \to \pm\infty$ $\phi(E)/F'(E)$ и $\hat{\chi}(x;\, p)$ стремятся к единице. Эти формулы полезны и в случае вещественного потенциала.

Благодарю Б.М.Левитана и С.П.Новикова за стимулирующие дискуссии.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
10 апреля 1975 г.

Литература

[1] Н.Н.Мейман. Труды Московского Мат. Общества, 9, 1960; Amer. Math. Soc. Transl. (2), 32, 1963.

[2] Э.Ч.Титчмарш. Разложение по собственным функциям и т. д., М., ИИЛ, 1961, том II.