РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ — *ТОМ 58, ВЫПУСК 12*
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД — *25 ДЕКАБРЯ 1993*

Письма в ЖЭТФ, том 58, вып.12, стр.945 - 949 ©1993 г. 25 декабря

МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПО МНОЖЕСТВЕННОСТИ В ВЫСШИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ КХД

И.М.Дремин, В.А.Нечитайло

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН
117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 октября 1993 г.

Отношение кумулянтных моментов к факториальным моментам распределений по множественности партонов проявляет новые своеобразные качественные особенности (минимумы и максимумы), когда высшие члены разложения пертурбативной КХД учитываются в нелинейном уравнении для производящей функции. Обсуждается соответствие результатов экспериментальным данным.

Проблема описания распределения частиц, рождающихся в неупругих процессах при высоких энергиях, по множественности до сих пор остается одной из важнейших в квантовой хромодинамике (КХД). Хорошо известно, что в низшем дваждылогарифмическом приближении (ДЛП) теория предсказывает значительно более широкое распределение, нежели наблюдаемые на эксперименте в e^+e^--соударениях [1]. Недавно было показано [2,3], что теоретическое распределение становится более узким, если корректнее учитывать нелинейность уравнений для производящих функций в КХД. При этом в работе [3] была предложена новая характеристика распределений $H_q = K_q/F_q$ – отношение их кумулянтных моментов к факториальным моментам, которая оказалась весьма чувствительной к тонким деталям распределений и небольшим вариациям факториальных моментов. Было предсказано [3] наличие минимума у этого отношения при $q \approx 5$, которое подтвердилось на эксперименте [4]. Вместе с тем, экспериментальные данные выявили осцилляции H_q при больших q, тогда как в работе [3] был получен вывод об асимптотическом постоянстве H_q при учете лишь низших членов разложения производящей функции в ряд Тейлора в соответствующем нелинейном уравнении.

Мы покажем, что это различие качественных черт функции H_q устраняется, если учесть высшие члены разложения, которые и приводят к появлению осцилляций. Читатель легко воспримет эту идею, если представит себе, как осцилляции обычного косинуса воспроизводятся все с лучшей точностью при все больших значениях аргумента путем последовательного учета высших членов его разложения в ряд Тейлора. Мы ограничимся здесь случаем глюодинамики, не рассматривая кварки (их роль сравнительно небольшая [5]) и, тем более, не претендуя на количественное описание эксперимента (см. также [5]). Наш подход состоит в более точном (по сравнению с предыдущими [1,3]) учете нелинейности в уравнении для производящей функции $G(z)$, которое в глюодинамике выглядит следующим образом:

$$G'(y,z) = \int_0^1 d\xi [\xi^{-1} - \Phi_r(\xi)] \gamma_0^2 [G(y + \ln(1-\xi), z) G(y + \ln \xi, z) - G(y,z)], \quad (1)$$

где $\gamma_0^2 = 2N_c\alpha_s/\pi$, α_s – бегущая константа связи, $N_c = 3$ – число цветов, $\Phi_r(\xi) = (1-\xi)(2-\xi(1-\xi))$ – регулярная часть ядра, штрих обозначает производную по $y = \ln Q/Q_0$ ($Q_0 = \mathrm{const}$) и Q – большой характерный поперечный импульс глюонной струи.

Производящая функция определяется как

$$G(y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(y)(1+z)^n, \quad (2)$$

где $P_n(y)$ – распределение партонов в глюонной струе. Факториальные и кумулянтные моменты связаны с $G(z)$ формулами

$$G(y,z) = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q!} F_q < n(y) >^q, \quad (3)$$

$$\ln G(z) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q!} K_q < n(y) >^q, \quad (4)$$

где $< n >$ – средняя множественность партонов в струе с данным y.

Разлагая G в ряд Тейлора в точке y, получаем из (1) после несложных преобразований

$$G'(y) = G(y) \left[\int_{-\infty}^{y} dy' \gamma_0^2(y')(G(y') - 1) - 2h_1\gamma_0^2(G(y) - 1) + \right.$$
$$\left. + \gamma_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n G^{(n)}(y) \right] + \gamma_0^2 \sum_{m,n}^{\infty} I_{mn} G^{(m)}(y) G^{(n)}(y), \quad (5)$$

где введены обозначения: $h_1 = 11/24$,

$$I_{mn} = \frac{1}{n!m!} \int_0^1 d\xi (\xi^{-1} - \Phi_r(\xi)) \ln^n(\xi) \ln^m(1-\xi),$$

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 d\xi (\xi^{-1} - 2\Phi_r(\xi)) \ln^n(1-\xi) = (-1)^{n+1}(2 - 2^{-n-1} - 3^{-n-1} - \zeta(n+1)),$$

$\zeta(n) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-n}$ – ζ-функция Римана.

Разделив обе части уравнения (5) на G и продифференцировав по y, получим уравнение

$$[\ln G(y)]'' = \gamma_0^2 \left[G(y) - 1 - 2h_1 G'(y) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n h_n G^{(n)}(y) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} h_{nm} \left(\frac{G^{(m)}G^{(n)}}{G}\right)'\right], \tag{6}$$

где $h_n = |I_{n-1}|$ для $n \geq 2$ и $h_{mn} = |I_{mn}|$. При переходе от исходного уравнения (1) к (6), мы пренебрегли только членами вида $d\gamma_0^2(y)/dy \sim \gamma_0^4(y)$.

Выясним теперь вопрос о параметре разложения в уравнении (6). Для этого заметим, что в формулах (3), (4) от y зависит только величина $\langle n\rangle$, так как F_q и K_q – постоянные по y в силу КНО-скейлинга. Дифференцируя ее по y, получаем:

$$\frac{d^n}{dy^n}\langle n\rangle^q = (\gamma q)^n \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{\gamma q}\frac{\gamma'}{\gamma} + \ldots\right)\langle n\rangle^q, \tag{7}$$

где введено обозначение $\langle n\rangle = \exp(\int^y \gamma(y')dy')$, γ – аномальная размерность КХД. Для $\gamma = \gamma_0 = \mathrm{const}$ получаем $\langle n\rangle = \exp(\gamma_0 y)$ и $d^n\langle n\rangle^q/dy^n = (\gamma_0 q)^n\langle n\rangle^q$. Как было отмечено ранее в работе [1] и практически использовалось в работах [2, 3], именно величина $x \equiv \gamma q$, а не параметр теории возмущений γ, является истинным параметром разложения. Выражения для γ и γ' через γ_0 в высших порядках приведены в [3]. Напомним, в частности, что $\gamma = \gamma_0 + O(\gamma_0^2)$ и $\gamma' = -h_1\gamma_0^3 + O(\gamma_0^4)$.

Уравнение (6) решалось в работе [3] с точностью до членов порядка x^2. При этом члены с $N > 2$ в первой сумме и вся вторая сумма отбрасывались. Решение приводит к H_q с единственным минимумом при $q \approx 5$ и с асимптотически постоянным значением $\gamma_0^2 h_2$ для $q \to \infty$ (см. [3]).

Учтем теперь члены следующего порядка в уравнении (6). Тогда оно приобретет вид

$$[\ln G]'' = \gamma_0^2[G - 1 - 2h_1 G' + h_2 G'' - h_3 G''' + h_{11}(G'(\ln G)')'] \tag{8}$$

или, используя (3) и (4), имеем

$$(q^2\gamma^2 + q\gamma')K_q = \gamma_0^2\{F_q[1 - 2h_1 q\gamma + h_2(q^2\gamma^2 + q\gamma') - h_3(q^3\gamma^3 + 3q^2\gamma\gamma' + q\gamma'')] +$$

$$+ h_{11}\sum_{k=1}^{q-1} C_q^k K_{q-k} F_k (q-k)k\gamma(q\gamma^2 + 2\gamma')\}, \tag{9}$$

где $C_q^k = q!/k!(q-k)!$ – биномиальные коэффициенты. Коэффициент h_{11} может быть вычислен с высокой точностью, если представить его в виде ряда:

$$h_{11} = \frac{7}{8} + \frac{8}{27} - \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)(n-3)}\right] \approx 0,8812.$$

Для удобства обозначим $k_q = K_q/(q-1)!$, $f_q = F_q/(q-1)!$. Кумулянтные и факториальные моменты связаны хорошо известным соотношением, которое в новых обозначениях k_q и f_q имеет вид

$$f_q = k_q + \sum_{k=1}^{q-1} k^{-1} f_k k_{q-k}. \tag{10}$$

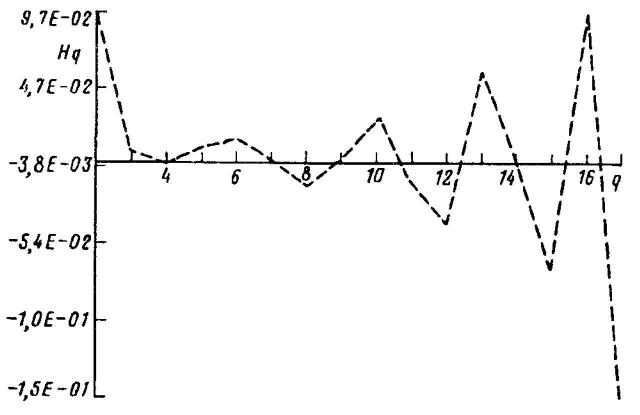
Оставляя в (9) только члены порядка x^3 и используя (10), получаем еще одно соотношение между k_q и f_q:

$$k_q = \frac{1}{1 - H_q^{(3)}} \sum_{k=1}^{q-1} f_k k_{q-k} \left[\frac{H_q^{(3)}}{k} - \gamma_0^2 \left(\frac{h_3}{k} - \frac{h_{11}}{q} \right) x \right], \tag{11}$$

где

$$H_q^{(3)} = \gamma_0^2 \left(h_2 - 2h_3 \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{2h_1}{x} + \frac{1}{x^2} \right).$$

Таким образом, два соотношения (10) и (11) однозначно определяют поведение двух функций k_q и f_q, а значит, и их отношения H_q. Путем численных расчетов мы получили функцию H_q, приведенную на рисунке.



Характерной особенностью отношения H_q в рассмотренном приближении по сравнению с низшим приближением [3] является осцилляторное поведение при больших q в отличие от стремления к постоянной асимптоте. Следует отметить, что первый минимум оказался сдвинут к $q = 4$. Амплитуда осцилляций возрастает с ростом q, а их период уменьшается настолько, что при $q \geq 14$ начинается смена знака H_q при каждом последующем значении q.

Итак, качественная картина с осцилляциями функции H_q, отмеченная впервые при анализе экспериментальных данных [4], воспроизводится в этом порядке разложения КХД и, более того, появляется предсказание о смене знака H_q при каждом сдвиге q на единицу в области больших q. Это предсказание можно объяснить по аналогии с поведением H_q в событиях с фиксированной множественностью [6], так как при больших значениях q основной пик распределения P_n "выглядит" как бесконечно узкий, что и приводит к смене знаков кумулянтов.

Подчеркнем разницу между уравнениями (10) и (11). Если первое дает чисто математическую связь моментов, то второе определяется динамикой процесса, в данном случае уравнениями КХД, которые и приводят к осцилляциям в отличие, скажем, от отрицательного биномиального распределения, моменты которого не осциллируют [6]. Период и амплитуда осцилляций, наблюдаемые на эксперименте, могут указать пути модификации уравнений для производящих функций в КХД.

Отметим, что наблюденное нами явление оказалось очень чувствительно к малейшим воздействиям. Например, результаты заметно меняются, если положить $\gamma' = 0$, то есть считать константу связи не бегущей. Хотя осцилляции при сравнительно небольших q сохраняются, несколько меняя форму, в области больших $q = 15$ происходит "срыв" решения, приводящий к отрицательным значениям факториальных моментов, что противоречит их определению. Аналогичный "срыв" можно усмотреть при заметно меньших $q = 5$ в ранней работе [7], где использовалось иное приближение в решении уравнения (1). Это показывает, насколько аккуратно и последовательно надо учитывать члены одного и того же порядка в этом уравнении. Весьма важно, что величина и качественное поведение H_q оказываются очень чувствительными к малейшим изменениям F_q даже в области сравнительно малых q, которые при обычном подходе трудно различимы. Функцию H_q следует использовать для выявления тонких особенностей распределений по множественности.

В заключение сделаем предостережение по поводу попыток непосредственного сравнения рисунка с данными экспериментов. Это недопустимо на количественном уровне, так как учет кварков, высших членов разложения, а, возможно, и конфайнмента, могут изменить численные значения. Однако нам представляется, что сам факт появления "квазиосцилляционного" поведения функции H_q в высших порядках теории заслуживает внимания и дальнейшего изучения.

---

1. Yu.L.Dokshitzer, V.A.Khoze, and S.I.Troyan, Perturbative QCD, Ed. A.H.Mueller, Singapore: World Scientific, 1989.
2. Yu.L.Dokshitzer, Phys. Lett. **305B**, 295 (1993).
3. I.M.Dremin, Phys. Lett. **313B**, 209 (1993).
4. I.M.Dremin, V.Arena, G.Boca et al., Proc. of. "Multiparticle Dynamics-93", Singapore: World Scientific, (in press).
5. И.М.Дремин, Б.Б.Левченко, В.А.Нечитайло, ЯФ (в печати).
6. I.M.Dremin, Phys. Rev. Lett. (in press).
7. E.D.Malaza and B.R.Webber, Nucl. Phys. **267B**, 702 (1986).