

ОСОБЕННОСТИ $1/f$ -ШУМА В МЕТАЛЛАХ

Р.О.Зайцев

Российский научный центр "Курчатовский институт"
123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 ноября 1993 г.

Изучение взаимодействия диффузионных и теплопроводностных мод позволяет определить температурную зависимость показателя α для интенсивности $1/\omega^\alpha$ -шума в металлах.

Измеряемая в металлических пленках интенсивность $1/\omega^\alpha$ -шумов [1] пропорциональна квадрату приложенного электрического поля E :

$$K_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2} \langle \{ \hat{j}_\alpha \hat{j}_\beta \} \rangle_\omega = S_{\alpha\beta\gamma\nu}(\omega) E_\gamma E_\nu \sim J_{\alpha\beta\gamma\nu} E_\gamma E_\nu \omega^{-\alpha}. \quad (1)$$

В условиях хорошей теплоизоляции показатель α заметно зависит от температуры T . Таким образом, возникает необходимость изучения низкочастотных особенностей среднего значения от произведения четырех операторов плотности тока:

$$S_{\alpha\beta\gamma\nu}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{2} \langle \hat{T}_\Gamma (\hat{j}_\alpha^{(+)}(t_1) \hat{j}_\beta^{(-)}(t_2) \hat{j}_\gamma(t_3) \hat{j}_\nu(t_4) + \hat{j}_\beta^{(+)}(t_2) \hat{j}_\alpha^{(-)}(t_1) \hat{j}_\gamma(t_3) \hat{j}_\nu(t_4)) \rangle. \quad (2)$$

Здесь \hat{j}_γ и \hat{j}_ν – операторы тока, связанные с источником напряжения; $\hat{j}_\alpha^{(\pm)}$ – токовые операторы источника шума; \hat{T}_Γ – символ упорядочения на временном контуре Γ , который используется в диаграммной технике неравновесных операторов [2].

Наиболее удобным оказывается представление, в котором все функции Грина имеют одну нулевую диагональную компоненту:

$$\hat{D}_\omega(q) = \begin{pmatrix} 0; & D_\omega^A(q) \\ D_\omega^R(q); & \mathcal{F}_\omega(q) \end{pmatrix}; \quad \hat{j}_\alpha^{(\pm)} = \frac{1}{2} (1 \pm \hat{\tau}^x) \tilde{j}_\alpha; \quad \hat{j}_{\gamma,\nu} = \tilde{j}_{\gamma,\nu} \hat{\tau}^x, \quad (3)$$

$D_\omega^{R,A}(q)$ – запаздывающая и опережающая функции Грина, $\tilde{j}_{\alpha,\gamma}$ – операторы плотности тока в представлении Гейзенберга, $\hat{\tau}^x$ – матрица Паули.

В электронной системе, находящейся в кристаллическом поле и при конечной температуре, низкочастотную особенность имеют только диффузионная и теплопроводностная моды, для которых

$$D_\omega^{R,A} = (\pm i\omega - Dq^2)^{-1}; \quad \mathcal{F}_\omega(q) = \frac{i}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\omega}{2T} \right) [D_\omega^R(q) - D_\omega^A(q)]. \quad (4)$$

Здесь и ниже D – коэффициент диффузии или температуропроводности χ .

В низкочастотном пределе $\omega \ll T$ диагональная функция Грина $\mathcal{F}_\omega(q)$ имеет более сильную низкочастотную особенность, чем запаздывающая и опережающая:

$$\mathcal{F}_\omega(q) = \frac{2T}{(\omega^2 + D^2 q^4)}. \quad (5)$$

Таким образом, для выявления дальнедействующих и низкочастотных особенностей при конечной температуре достаточно выделить вклад, происходящий от произведений дальнедействующих функций Грина (5) и содержащий наименьшее число интегралов по виртуальным импульсам и частотам.

Можно заметить, что наибольший вклад в четырехтоковый коррелятор (2) возникает от интегрирования произведения двух корреляционных функций (5) диффузионного происхождения:

$$S_{\alpha\beta\gamma\nu}(\omega) = \int_{|\omega|}^{\infty} d\omega' \int_0^{\infty} \frac{[(\Gamma_{\alpha\gamma}^{(+)}\Gamma_{\beta\nu}^{(-)} + \Gamma_{\beta\nu}^{(+)}\Gamma_{\alpha\gamma}^{(-)}) + (\alpha \rightleftharpoons \beta)]}{[(\omega')^2 + D^2q^4]^2} q^{d-1} dq. \quad (6)$$

Здесь не выписано слагаемое, пропорциональное произведению двухтоковых корреляторов $\Gamma_{\alpha\beta}$, относящихся к источнику шумов, и двухтоковых корреляторов $\Gamma_{\gamma\nu}$, связанных с источником напряжения. В длинноволновом пределе $q^2 \rightarrow 0$ их вклад оказывается несущественным по сравнению с тем, что дают произведения смешанных двухтоковых корреляторов $\Gamma_{\alpha\nu}^{(\pm)}$.

Для нахождения закона, по которому обращаются в нуль величины $\Gamma_{\alpha\nu}^{(\pm)}$, удобно произвести рассмотрение в пределе $Dq^2 \gg \omega$ и сначала произвести интегрирование по частотам. При этом в пространстве критической размерности $d = 6$ интегралы от двух функций Грина (5) становятся логарифмическими, а уравнения ренорм-группы для 4- и 2-токовых корреляторов приобретают следующий вид:

$$-\frac{\partial S_{\alpha\beta\gamma\nu}}{\partial t} = [(\Gamma_{\alpha\gamma}^{(+)}\Gamma_{\beta\nu}^{(-)} + \Gamma_{\beta\nu}^{(+)}\Gamma_{\alpha\gamma}^{(-)}) + (\alpha \rightleftharpoons \beta)]; \quad -\frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^{(\pm)}}{\partial t} = [\Gamma_{\alpha\nu}^{(\pm)}\Gamma_e]. \quad (7)$$

Здесь $t = -\ln q$ - логарифмическая переменная, которая в трехмерном пространстве превращается в q^{-3} , Γ_e - электронная скалярная вершина (см. рис.1а). В уравнениях (7) квадратные скобки обозначают неуниверсальный фактор, который с помощью масштабного преобразования может быть превращен в единицу.

Вычисления, проведенные во втором порядке по числу виртуальных диффузионных и теплопроводностных мод (5), позволяют получить замкнутую систему уравнений, связывающую три типа вершин: Γ_e , Γ_{ep} и Γ_p (изображены на рис.1). После проведения трех масштабных преобразований находим следующее:

$$-\frac{\partial \Gamma_e}{\partial t} = (3 + g)\Gamma_e^2 + \nu\Gamma_{ep}^2; \quad -\frac{\partial \Gamma_{ep}}{\partial t} = 3\Gamma_e\Gamma_{ep} + 2\Gamma_{ep}^2 + \Gamma_p\Gamma_{ep}; \quad -\frac{\partial \Gamma_p}{\partial t} = 3\nu(g - 1)\Gamma_e^2 + 3\Gamma_p^2. \quad (8)$$

Здесь $\nu = (D + \chi)^2/4D\chi$, $g = 3 - 2\varphi + 4\varphi^2$, а величина φ , определяющая температурное влияние теплопроводности решетки, равна отношению двухфононной к двухэлектронной интенсивности тепловых флуктуаций (см. рис.2). Во втором порядке по числу фононных линий получим $\varphi = N/R$, где

$$N = 2 \int \left(\frac{\omega_q}{v_0q}\right)^2 \Gamma_q^{-1} \frac{dq}{(2\pi)^3}; \quad R = \int \left(\frac{\xi_p}{\Theta}\right)^4 \tau_{\xi} \frac{m p_0}{2\pi^2} d\xi. \quad (9)$$

Здесь v_0 и p_0 - скорость и импульс на поверхности Ферми. В используемой сферической модели $\omega_q = cq$, $\xi_p = p^2/2m - \mu$, а интегралы по длинам векторов

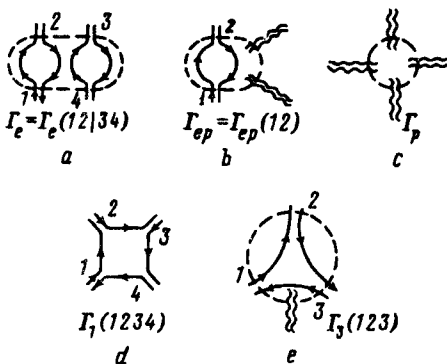


Рис.1

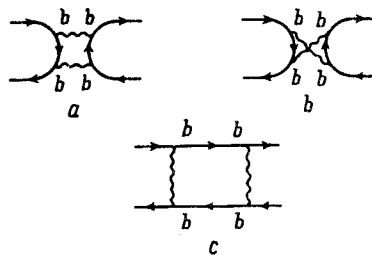


Рис.2

Рис.1. Графическое изображение скалярных четырехвершинных частей, записанное в нулевом приближении по числу диффузионных и теплопроводностных пропагаторов

Рис.2. Диаграммы, отношение которых $(a+b)/c$ определяет параметр φ . Индексы b - b обозначают ненулевую диагональную фононную или электронную функцию Грина

p и q ограничены условиями $q < \Theta/c$, $|\xi_p| < \Theta$, где c – скорость звука, Θ – температура Дебая.

По порядку величины параметр φ есть отношение средней длины пробега фононов $l_p \sim c/\Gamma_q$ к средней длине электронного пробега τv_0 . В области низких температур $T \ll \Theta$ затухание фононов имеет порядок $\Gamma_\omega \sim \omega c/v_0$ и практически не зависит от температуры [3]. По этой причине все изменение параметра φ определяется температурной зависимостью обратного времени электронной релаксации:

$$\varphi \sim \frac{1}{\tau\Theta} \sim \frac{1}{\tau_0\Theta} + \varphi_1 \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3, \quad (10)$$

где τ_0 – время свободного пробега электрона при $T = 0$.

В области высоких температур $T \gg \Theta$ средняя длина пробега фононов с немаксимальной скоростью звука имеет тот же порядок и ту же температурную зависимость, что и электронная длина $l_e \sim l_\perp \sim a(Mc^2/T)$, где Mc^2 – величина порядка температуры плавления, a – размер элементарной ячейки. Для продольных фононов с максимальной скоростью звука $l_p \sim a(Mc^2/T)^{5/4}$ [4], так что параметр φ имеет следующее высокотемпературное разложение:

$$\varphi = \varphi_2 + \varphi_3(Mc^2/T)^{1/4}. \quad (11)$$

Постоянные φ_1 и φ_2 имеют порядок единицы, однако φ_3 мало и пропорционально доле фононов с максимальной скоростью звука. Сравнение (10) и (11) показывает, что с ростом температуры величина φ достаточно быстро достигает значений порядка единицы и имеет максимум в области температур, несколько больших дебаевской.

Рассмотрим сначала так называемый B -шум, когда хотя бы одна из поверхностей металлической пленки имеет плохую теплоизоляцию. В этих условиях на соответствующей границе тепловой поток не равен нулю, так что вклад теплопроводностных мод "отключается" на частотах порядка $\chi\kappa_i^2/(\kappa_m L)^2$, где κ_m и κ_i – теплопроводности металла и подложки, L – поперечный размер

металлической пленки. В области более низких частот в уравнениях (8) следует положить $\varphi = 0$, $\Gamma_p = \Gamma_{ep} = 0$, так что в пространстве размерности $d = 6 - \epsilon$ получим

$$S \sim q^{-2\epsilon/3} \sim \omega^{-\epsilon/3}, \quad (12)$$

что при $d = 3$ дает $1/f$ -шум ($\epsilon = 3$, $\alpha = 1$).

В случае А-шума, когда на всей поверхности металлической пленки тепловой поток равен нулю, при любой частоте теплопроводная мода называется так же существенной, как и диффузионная. При этом $g > 11/4$ и показатель α зависит от температуры через функцию $\varphi(T)$.

В асимптотическом пределе $t \gg 1$ решение уравнений (7) и (8) можно искать в виде

$$\Gamma_s \approx \gamma_s/t \quad \Gamma_{\alpha\nu}^{(\pm)} \sim 1/t^{\gamma_\epsilon}. \quad (13)$$

Поэтому в трехмерном пространстве все скалярные и двухтоковые вершины обращаются в нуль по степенному закону $\Gamma_s \sim q^3$, $\Gamma_{\alpha\nu} \sim q^{3\gamma_\epsilon}$.

Исследование на устойчивость показывает, что для всех $\varphi > 1,15$ или $g > 6$ устойчивым оказывается решение с независимыми Γ_p и Γ_e ; $\Gamma_{ep} = 0$:

$$\Gamma_e = 1/(3+g)t, \quad \Gamma_p = 1/3t, \quad \Gamma_{\alpha\nu}^{(\pm)} \sim t^{-1/(3+g)}; \quad S \sim t^{1-2/(3+g)}. \quad (14)$$

Поэтому в трехмерном пространстве

$$\alpha = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3 - \varphi + 2\varphi^2} \right). \quad (15)$$

В достаточно узкой области $\varphi_c(\nu) < \varphi < 1,15$ устойчивостью обладают решения с отличной от нуля перепутывающей вершиной $\Gamma_{ep} = \nu\Gamma_p$, $\text{Im}\nu = 0$. Параметр ν определяется через ν и g с помощью следующего уравнения:

$$(g-1)^2[27\nu^2\nu^4 - 6\nu\nu^3 - 2\nu\nu^2] - (g-1)[42\nu\nu^3 - (35\nu+4)\nu^2 + 2\nu+2] + (16+\nu)\nu^2 - 26\nu+10 = 0. \quad (16)$$

При этом

$$\Gamma_{\alpha\nu} \sim t^{-k}, \quad S \sim t^{1-2k}, \quad (17)$$

откуда после замены $t \rightarrow \omega^{-3/2}$ получаем

$$\alpha = \frac{3}{2} - \frac{3(g-1)\nu\nu^2 - 2\nu+2}{g[1+(g-1)\nu\nu^2]}. \quad (18)$$

Соотношения (16) и (17) определяют показатель α при всех тех значениях действительного параметра ν , для которого существуют действительные решения уравнения (16) относительно величины $(g-1)$. Можно заметить, что максимальному значению $\nu = 0,177$ соответствуют минимальные значения параметров $\nu = 1$ и $\alpha = 1,117$. При $\nu = 0$ или $g = 6$ имеем промежуточное значение $\alpha = 7/6$, что соответствует $\varphi = 1,15$. При дальнейшем увеличении параметра φ значение показателя α не зависит от ν и медленно возрастает в согласии с (15).

Специального рассмотрения заслуживает область значений параметра φ : $0 < \varphi < 0,94$ или $2,75 < g < 4,662$, для которых уравнение (16) имеет комплексные решения. Можно показать, что они приводят к нестепенным

особенностям четырехтокового коррелятора. Однако мы оставляем в стороне изучение такой возможности, имея в виду, что в согласии с (10) значение $\varphi < 1$ можно обнаружить только в очень чистых металлах и при достаточно низких температурах.

Согласно соотношениям (11) и (15), при $T \gg \Theta$ в случае *A*-шума имеем медленное температурное убывание показателя α . В области низких температур при достаточно малой остаточной длине свободного пробега электрона показатель α согласно (10) и (16) возрастает с температурой и имеет максимум при температуре, несколько большей Θ . При этом максимальное значение показателя α никогда не может достигать значений $3/2$, но всегда оказывается больше единицы. Эти выводы качественно согласуются с экспериментами [5], где на серебряных пленках обнаружено максимальное значение параметра $\alpha = 1,2$ при температуре 290 К, в то время как $\Theta = 215$ К. Таким образом, происхождение температурного максимума показателя α в случае *A*-шумов удается связать с существованием аномального поглощения продольных фононов с максимальной скоростью звука. В анизотропных кристаллах этот эффект ослабевает. Поэтому в случае *A*-шума здесь можно ожидать медленного температурного убывания показателя α к значениям порядка единицы.

Вывод о независимости показателя α от температуры в случае *B*-шума находится в качественном согласии с экспериментом.

Работа была сделана при поддержке фондом Сороса, осуществляемой Американским Физическим Обществом.

-
1. J. Clarke and T. Hsiang, *Phys. Rev. B* **13**, 4790 (1976).
 2. Л.В.Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1515 (1964).
 3. А.Б.Мигдал, *ЖЭТФ* **32**, 399 (1957).
 4. И.Я.Померанчук, *ЖЭТФ* **12**, 419 (1942).
 5. P. Dutta, P. M. Horn, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 497 (1981).