Письма в ЖЭТФ, том 24, вып. 3, стр. 179 – 183 *5 августа 1976 г.*

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГЕЛЛ-МАННА – ЛОУ В СКАЛЯРНЫХ ТЕОРИЯХ С СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Л.Н.Липатов

Найдена функция Гелл-Манна – Лоу во всех порядках теории возмущений для скалярной теории с взаимодействием $H_{int} = g \int \frac{\phi^n}{n!} d^D x$ для $n \to \infty$, $D = \frac{2n}{n-2} \to 2$. Исследованы ее ультрафиолетовые точки стабильности.

1. Как известно, в квантовой электродинамике и в большинстве известных до недавнего времени моделей квантовой теории поля имеет место физическое явление экранировки взаимодействия за счет поляризации вакуума, которое приводит к обращению в нуль физических зарядов при условии, что затравочные заряды достаточно малы [1]. В то же время в некоторых популярных в настоящее время неабелевых калибровочных моделях имеет место противоположная ситуация – затравочный заряд обращается в нуль при достаточно малых физических зарядах [3]. Эти результаты получены с помощью теории возмущений и поэтому имеют ограниченную область применимости. Для окончательного выяснения вопроса о внутренней противоречивости квантовой электродинамики и других традиционных моделей квантовой теории поля необходимо вычислить во всех порядках теории возмущений так называемую функцию Гелл-Манна – Лоу (ГМЛ) [3], равную по определению

$$\psi\left(g\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g_\mu\right)\right) \equiv \frac{d g\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g_\mu\right)}{d \ln \frac{k^2}{\mu^2}} \tag{1}$$

где $g\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g_\mu\right)$ – инвариантный заряд который выражается через перенормированные функции Грина и вершинную часть (см. (3)), μ – импульс в точке нормировки, выбираемый обычно много большим масс всех частиц в теории. g_μ – значение инвариантного заряда в точке нормировки $p^2 = \mu^2$. Перенормируемость теории гарантирует, что правая часть соотношения (1) не зависит от $\ln(k^2/\mu^2)$ при условии, что она выражена в виде функции от инвариантного заряда.

2. В данной работе мы рассмотрим задачу вычисления функции ГМЛ в классе скалярных моделей квантовой теории поля, описываемых лагранжианом:

$$L = \int d^D x \left[\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - g\frac{\phi^n}{n!}\right] . \tag{2}$$

Для того, чтобы теория была перенормируема, мы положим размерность пространства D равной

$$D = \frac{2n}{n-2}, \qquad n = 4, 6, 8\ldots \quad . \tag{2a}$$

В этот класс моделей попадают известные теории $H_{int} = g\int \frac{\phi^4}{4!} d^4x$ [4] и $H_{int} = g\int \frac{\phi^6}{6!} d^3x$ [5].

Инвариантный заряд в теории (2) определяется по формуле

$$g\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g_\mu\right) = g_\mu \Gamma_c\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g_\mu\right) d_c^{n/2}\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g_\mu\right); \qquad \Gamma_c(1, g_\mu) = d_c(1, g_\mu) = 1 \tag{3}$$

где Γ_c – вершинная часть для n-хвостовой амплитуды, d_c/p^2 – функция Грина скалярной частицы. Внешние инварианты для вершинной функции Γ_c выбраны в эвклидовой области: $p_i^2 = p^2 > 0$, $p_i p_j|_{i \neq j} = -p^2/(n-1)$. В этом случае в фейнмановских диаграммах может быть сделан виковский поворот $t \to -ix_D$. Поэтому далее мы будем писать все выражения в эвклидовой форме.

3. В теории $H_{int} = g \int \frac{\phi^4}{4!} dx^4$ известны только три первых члена разложения функции ГМЛ в ряд по инвариантному заряду [4]. В данной работе мы найдем функцию ГМЛ во всех порядках теории возмущений в пределе сильной нелинейности взаимодействия:

$$n \to \infty, \qquad D = \frac{2n}{n-2} \to 2. \tag{4}$$

Можно надеяться, что даже для теории с $H_{int} = g \int \frac{\phi^4}{4!} d^4x$, а тем более для теории с $H_{int} = g \int \frac{\phi^6}{6!} d^3x$, приближение к истинной функции ГМЛ, даваемое предельным переходом (4), будет хорошим.

Главное упрощение, которое возникает при нахождении функции ГМЛ в теории (4), связано с тем, что в каждом порядке теории возмущений k главную роль при вычислении инвариантного заряда (3) играют вершинные части, причем в сумме по вершинным частям с различным числом внешних линий n_i, входящих в каждую вершину, и внутренних линий n_{ij}, соединяющих вершины взаимодействия, имеется перевал при $\tilde{n}_i = \tilde{n}_{ij} = n/k$ достаточно широкий, чтобы заменить суммирование интегрированием, и достаточно узкий, чтобы вынести из под знака суммирования фейнмановскую диаграмму в перевальной точке. Вклад этой фейнмановской диаграммы содержит только однологарифмическую ультрафиолетовую расходимость, так что мы избавлены от необходимости вычисления младшего логарифма в диаграммах, содержащих внутренние расходимости. Вычисление перевала по n_i и n_{ij} дает

$$\psi(g) = \sum_{k=2}^{\infty} (-g)^k C_k(n),$$

$$C_k(n)\Big|_{n\to\infty} = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{e}{8\pi} k^{\frac{k+1}{k-1}} \right)^{n\frac{k-1}{2}} \times$$

$$\times \left(2\pi n \frac{k-1}{k} \right)^{-\frac{k}{2}} e^{-(k-1)(1+\ln\pi + c_E)} \sqrt{2}\, C_k. \tag{5}$$

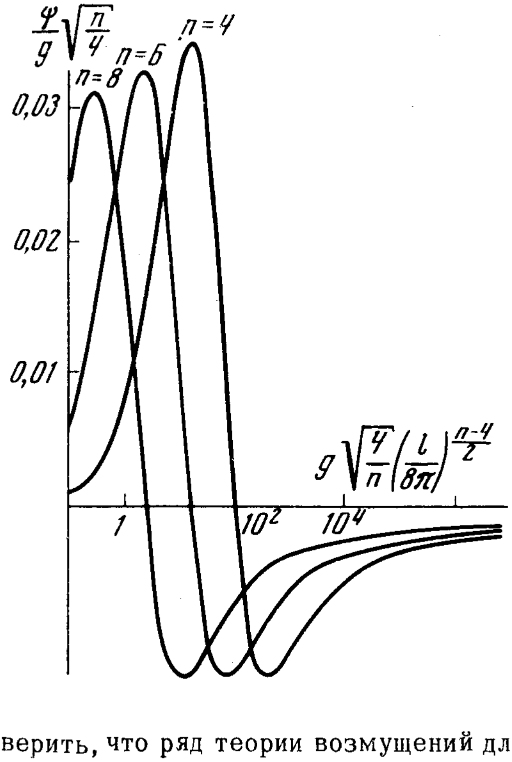
Здесь $\Gamma(z)$ есть гамма-функция, а $c_E \approx 0,577$ – постоянная Эйлера.

4. Величина C_k есть вклад фейнмановской диаграммы для вершинной части, в которой все точки соединены равным числом линий

$$C_k = \int \Pi\, d^2x_i \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{-\frac{4}{k}} \delta^2\left(\frac{\Sigma x_i}{k}\right)\delta\left(\frac{\Sigma \ln (x_i^2)}{k}\right). \qquad (6)$$

Второе значительное упрощение, которое достигается предельным переходом (4), связано с двумерностью фейнмановских интегралов (6), что позволяет получить ответ в замкнутой форме

$$C_k = \frac{\pi^{k-1}}{\Gamma(k-1)} \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)}\right\}^k \qquad (7)$$



Нетрудно проверить, что ряд теории возмущений для $\psi(g)$ (5) оказывается асимптотическим $(C_k(n)|_{k\to\infty} \sim (k!)^{\frac{n}{2}-1})$. Поэтому возникает задача нахождения функции, разложение которой в ряд по k совпадает с (5), что является неоднозначной процедурой. На простых моделях можно проверить, что правильный рецепт суммирования ряда (5) заключается в замене его на интеграл Ватсона – Зоммерфельда

$$\psi(g) = \frac{1}{-2i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{dk}{\sin \pi k}\, g^k C_k(n), \qquad 1 < \sigma < 2. \qquad (8)$$

В форме (8) функция $\psi(g)$ определена при любых g. В частности

$$\psi(g)\big|_{g\to 0} = g^2 \frac{\sqrt{2}}{2\pi n}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-(1+c_E)} \quad , \tag{9а}$$

$$\psi(g)\Big|_{g\to\infty} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\;\frac{g}{(\ln g)^{3/2}} \; . \tag{9б}$$

Таким образом, функция Гелл-Манна – Лоу меняет знак при увеличении g – имеется ультрафиолетовая точка стабильности $\psi(g_0) = 0$ такая, что $g\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g_\mu\right)\Big|_{p^2\to\infty} \to g_0$. Можно проверить, что с ростом n число ультрафиолетовых точек стабильности растет как $\sqrt[4]{n}$. На рисунке представлена функция ГМЛ для двух физически интересных случаев $n = 4$ и $n = 6$. Можно думать, что истинная функция ГМЛ для теорий с $H_{int} = g\int \frac{\phi^4}{4!} d^4x$ и $H_{int} = g\int \frac{\phi^6}{6!} d^3x$ будет отличаться от вычисленной в данной работе (см. рисунок) на поправки порядка $1/n$ (т. е. 1/4 и 1/6 для двух указанных выше теорий).

Автор благодарен А.П.Бухвостову, В.Н.Грибову, Е.И.Малкову и А.А.Мигдалу за полезные обсуждения, а также М.И.Стрикману за помощь в вычислениях на ЭВМ.

Институт ядерной физики
им. Б.П. Константинова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
31 мая 1976 г.

Литература

[1] Л.Д.Ландау, И.Я.Померанчук. ДАН СССР, **102**, 489, 1955; Е.С.Фрадкин. ЖЭТФ, **28**, 740, 1955.

[2] H.D.Politzer. Phys. Rev. Lett., **30**, 1346, 1973; D.J.Gross, F.Wilczek. Phys. Rev. Lett., **30**, 1343, 1973.

[3] M.Gell-Mann, F.E.Low. Phys. Rev., **95**, 1300, 1954.

[4] В.В.Белокуров, А.А.Владимиров, Д.И.Казаков, А.А.Славнов, Д.В.Ширков. ТМФ, **19**, 149, 1974; Г.М.Авдеева, А.А.Белавин. Письма в ЖЭТФ, **18**, 611, 1973.