Письма в ЖЭТФ, том 24, вып. 3, стр. 184 – 186 *5 августа 1976 г.*

МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СТРУНЫ И НЕУПРУГОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ

И.Л.Боголюбский

Показано, что при переходе от уравнения нелинейной струны к его корректной модификации взаимодействия солитонов становятся неупругими, причем коэффициент неупругости растет с увеличением амплитуды сталкивающихся солитонов.

В последнее время уравнения Кортевега – де Вриза (КдВ) и нелинейной струны (Boussinesq'a),

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} \tag{1}$$

вызывают большой интерес, так как, во-первых, они описывают широкий круг нелинейных волновых явлений, и, во-вторых, являются точно решаемыми моделями [1]. Для уравнения (1) получены N-солитонные решения [2] и найден бесконечный набор коммутирующих интегралов движения, что явно указывает на его полную интегрируемость [3]; для уравнения КдВ она доказана строго [4]. В моделируемых ими нелинейных системах невозможна стохастизация, что наиболее ярко выражается в абсолютно упругих взаимодействиях солитонов.

Необходимо подчеркнуть, что уравнения КдВ и (1) являются приближенными и получены для длинных волн ($k << 1$) . При $u \to 0$ из (1) следует дисперсионное соотношение $\omega^2 = k^2(1 - k^2)$. Таким образом, уравнение (1) описывает нефизическую неустойчивость коротких волн, $k > 1$, а задача Коши для этого уравнения является некорректной. Способ его "регуляризации" находится линеаризацией системы уравнений для ионно звуковых волн в плазме (см., например, [5]), приводящей к уравнению $Lu = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mp \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2}\right) u = 0$. Сохраняя форму нелинейного члена, получим корректный аналог уравнения нелинейной струны (модифицированное уравнение Boussinesq'a [6]),

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxtt} \,. \tag{2}$$

Для замены u_{xxxx} на u_{xxtt} в других задачах заметим, что в (1) члены $(u^2)_{xx}$ и u_{xxxx} являются при $k << 1$ и малых амплитудах, $A << 1$, поправками по сравнению с членами u_{tt} и u_{xx}, равными в нулевом порядке по k и A друг другу. Оператор L получается, кроме того, очевидным при $k << 1$ переходом от $\omega^2 = k^2(1 - k^2)$ к $\omega^2(1 + k^2) = k^2$. Понятно, что динамика длинноволновых процессов при использовании вместо уравнения (1) его модификации (2) практически не меняется. Таким образом, уравнение (2) является удобным для приближенного моделирования, в том числе на ЭВМ, динамики различных нелинейных волн со слабой дисперсией, спектр которых при $k << 1$, $u \to 0$ есть $\omega^2 \approx k^2(1 - k^2)$.

Перепишем уравнение (2) в виде системы, вводя "скорость" v:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=-\frac{\partial v}{\partial x}\ ,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial(u+u^2)}{\partial x}\ . \tag{3}$$

Если $u\to 0$ при $|x|\to\infty$, из (3) следуют законы сохранения

$$B_1=\int_{-\infty}^{\infty}u\,dx=\text{const}\,,\qquad B_2=\int_{-\infty}^{\infty}v\,dx=\text{const}\ . \tag{4}$$

Уравнение (2) имеет решения в виде солитонов

$$u=A\,\text{sch}^2\left[\left(\frac{A}{6}\right)^{1/2}\frac{(x-Mt)}{M}\right]\ ,\qquad M=\pm\left(1+\frac{2}{3}A\right)^{1/2}, \tag{5}$$

которые при $A<<1$, имея ширину $\Delta x\sim\left(\frac{6}{A}\right)^{1/2}>>1$, практически не отличаются от солитонов уравнения (1). Различие солитонных решений и их динамики в рамках уравнений (1) и (2) становится существенным при $A\sim 1$, когда относительная роль коротких волн в соответствии с формулой $u(k)\sim k\,\text{csch}\dfrac{k\pi}{(2A/3)^{1/2}}$, полученной для солитонов уравнения (1), становится заметной.

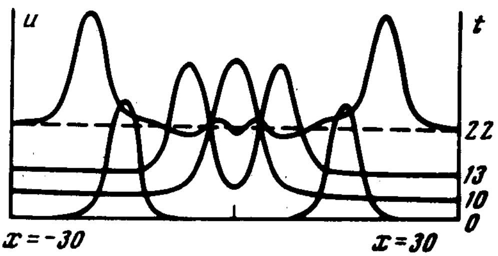

Рис. 1. Неупругое встречное столкновение солитонов (5) уравнения (2) при $A=2$

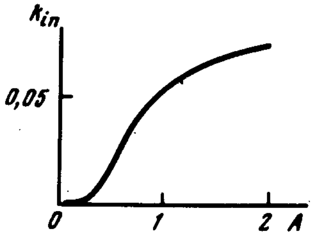

Рис. 2. Зависимость коэффициента неупругости k_{in} от амплитуды сталкивающихся солитонов (5)

Анализ взаимодействия солитонов, если они существуют в рассматриваемой нелинейной системе, является эффективным способом определения, возможна ли в ней нелинейная стохастизация. Однако аналитически исследовать столкновения солитонов в рамках (2) не удается. Поэтому были проведены эксперименты на ЭВМ с одинаковыми встречными солитонами (5) при различных амплитудах A. Видно, (рис. 1), что их столкновения являются неупругими. Определим коэффициент неупругости k_{in} как отношение амплитуды несолитонных возмущений, рожденных при столкновении солитонов, к их амплитуде A. При $A \to 0$, как и следовало ожидать, $k_{in} \to 0$; с увеличением A он монотонно растет, достигая величины $k_{in} \approx 0{,}075$ при $A = 2$ (рис. 2). Таким образом, при более последовательном описании коротких волн уравнением (2) моделируется нелинейная система, в которой возможно перераспределение энергии по степеням свободы. С точки зрения проблемы нелинейной стохастизации Ферми – Паста – Улама [7] представляет интерес полученное в данной работе указание на увеличение темпа стохастизации в этой системе с ростом амплитуды нелинейных возмущений.

Автор благодарен В.Г.Маханькову за постановку задачи и В.Е.Захарову за полезные обсуждения.

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию 21 июня 1976 г.

Литература

[1] A.C.Scott, F.Y.F.Chu, D.W.McLaughlin. Proc. IEEE, 61, 1443, 1973.

[2] R.Hirota. J. Math. Phys., 14, 810, 1972.

[3] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 65, 219, 1973.

[4] В.Е.Захаров, Л.Д.Фаддеев. Функциональный анализ и его приложения, 5, 18, 1971.

[5] Р.З.Сагдеев. Вопросы теории плазмы, М., Атомиздат, 4, 20, 1964.

[6] И.Л.Боголюбский. Препринт ОИЯИ, Р9-8698, Дубна, 1975.

[7] Э.Ферми. Научные труды, М., изд. Наука, 11, 1972.