Письма в ЖЭТФ, том 24, вып. 4, стр. 196 – 199 20 августа 1976 г.

НОВЫЙ ПРИМЕР КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СО СКРЫТОЙ СИММЕТРИЕЙ

Г.П.Проньке, Ю.Г.Строганов

Известно несколько квантовомеханических задач со скрытой симметрией[1] – осциллятор, задача Кеплера, ротатор и несколько других, не имеющих непосредственной физической интерпретации. Атом водорода, например, помимо обычной вращательной симметрии обладает симметрией 0(4), (долю дискретного спектра) обусловленной существованием сохраняющегося вектора Рунге – Ленца [2].

Рассматривая задачи, в которых внутренние степени свободы взаимодействуют с неоднородным полем, авторы обнаружили пример такой системы, обладающей динамической симметрией. А, именно, нейтрон в магнитном поле линейного тока образует связанные состояния, спектр которых определяется группой динамической симметрии 0(3). Энергия уровней определяется квантовым числом n:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\,(1{,}7\cdot 10^{-6} J^2)\,\text{эв}, \qquad (1)$$

где J – величина тока в амперах.

Начнем с непосредственного решения уравнения Шредингера. Нейтральная нерелятивистская частица спина 1/2 с магнитным моментом μ описывается гамильтонианом:

$$H = \frac{\mathrm{p}^2}{2M} - \mu\vec{\sigma}\vec{\mathcal{H}}, \qquad (2)$$

где $\vec{\mathcal{H}}$ – внешнее магнитное поле. Рассмотрим поле, создаваемое линейным током величины J, направленным по оси z.

$$\vec{\mathcal{H}} = 0{,}2J\left(\frac{y}{r^2}, -\frac{x}{r^2}, 0\right). \qquad (3)$$

Если r – в *см*, а ток в амперах, то $\mathcal{H}$ – в гауссах. Для такой конфигурации движение вдоль оси z является свободным и мы сразу исключаем, связанную с ним часть гамильтониана. Удобно перейти к безразмерным переменным, сделав масштабное преобразование:

$$\kappa\mathbf{r} = \vec{\rho}, \qquad \mathbf{p}/\kappa\hbar = \vec{\pi}, \qquad \text{где} \quad \kappa = \sqrt{-2ME/\hbar} \qquad (4)$$

---

[1] Для детального ознакомления с понятием скрытой симметрии отсылаем читателя к обзору Попова [1].

мы ориентируемся на дискретный спектр. В результате уравнение принимает вид

$$[\vec{\pi}^2 + 1 + 2n(\sigma_x y - \sigma_y x)^{-1}]\psi = 0, \qquad (5)$$

где $n = -0{,}2\mu MJ/\kappa\hbar$[1], а через x и y обозначены проекции безразмерного вектора.

Опишем коротко схему решения, детали которого приведены в отдельной работе. Умножая уравнение на величину $(\sigma_x y - \sigma_y x)$ и переходя к импульсному представлению, получаем систему уравнений первого порядка для компонент спинора ψ. Разделяя переменные в полярных координатах и исключая одну из компонент спинора, получаем дифференциальное уравнение второго порядка, которое некоторой заменой переменных сводится к уравнению для гипергеометрической функции. Условие квантования приводит к тому, что число n, определяемое в примечании к формуле (5) принимает целые положительные значения. В импульсном представлении волновые функции дискретного спектра имеют вид

$$\psi(p) = C_{n,m}\begin{pmatrix} \dfrac{(\pi_x + i\pi_y)^{m-1/2}}{1+\vec{\pi}^2}\, F\left(n, -n, m+\tfrac{1}{2}, \dfrac{\vec{\pi}^2}{1+\vec{\pi}^2}\right) \\ \dfrac{n}{m+1/2}\, \dfrac{(\pi_x + i\pi_y)^{m+1/2}}{(1+\vec{\pi}^2)^2}\, F\left(n+1, -n+1, m+\tfrac{3}{2}, \dfrac{\vec{\pi}^2}{1+\vec{\pi}^2}\right) \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Уровень с квантовым числом n оказывается $2n$-кратно вырожденным. Волновые функции с данным значением энергии можно классифицировать с помощью оператора проекции полного момента на ось z. Его собственные значения m меняются в пределах от $-n + 1/2$ до $n - 1/2$. Формула (6) отвечает случаю положительных m.

По аналогии с квантовым осциллятором и задачей Кеплера можно думать, что и в нашем случае дополнительное вырождение связано с существованием новых интегралов движения.

Перепишем уравнение (5) в виде $(K+1)\psi = 0$, где K – с точностью до постоянного множителя, гамильтониан нашей системы, подвергнутый масштабному преобразованию (4)

$$K = \vec{\pi}^2 + 2n(\sigma_x y - \sigma_y x)^{-1}. \qquad (7)$$

Рассмотрим тройку операторов:

$$A_x = -n(\sigma_x y - \sigma_y x)^{-1} y + \tfrac{1}{2}(\pi_x J_z + J_z \pi_x),$$

---

[1] Знак в формуле для n выбран с учетом того, что магнитный момент нейтрона отрицателен, поэтому n положительно.

$$A_y = n(\sigma_x y - \sigma_y x)^{-1} x + \tfrac{1}{2}(\pi_y J_z + J_z \pi_y),$$

$$J_z = \frac{\sigma_z}{2} + (x\pi_y - y\pi_x). \tag{8}$$

Один из них является проекцией момента количества движения на ось z. Два других – удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} &[A_x, J_z] = -iA_y && [A_x, K] = 0, \\ &[A_y, J_z] = -iA_x && [A_y, K] = 0, \\ &[A_x, A_y] = -iKJ_z . \end{aligned} \tag{9}$$

Переопределяя операторы по формуле

$$\begin{aligned} J_x &= A_x(-K)^{-\frac{1}{2}}, \\ J_y &= A_y(-K)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{10}$$

получаем для дискретного спектра динамическую группу симметрии 0(3). Между генераторами этой группы и гамильтонианом K существует связь, устанавливаемая прямым вычислением

$$K = -\frac{n^2}{\mathbf{J}^2 + \frac{1}{4}} . \tag{11}$$

Аналогичная связь известна и в задаче Кеплера [1].

Уравнение (6) можно переписать теперь в виде $(\mathbf{J}^2 + \frac{1}{4} - n^2)\psi = 0$. Свойства неприводимых представлений группы вращений достаточно широко известны. Нас интересуют представления с полуцелыми проекциями. Они характеризуются полуцелым положительным числом (спином) j. Легко видеть, что $n = j + \frac{1}{2}$.

Волновые функции непрерывного спектра образуют базис для представлений второй основной серии группы 0(2,1) [3].

Для задач со скрытой симметрией часто вводят так называемую группу неинвариантности, одно из неприводимых представлений которой описывает все связанные состояния системы. Для модифицированного "гамильтониана"

$$\widetilde{H} = (\vec{\pi}^{\,2} + 1)(\sigma_x y - \sigma_y x) \tag{12}$$

спектр которого линеен, а волновые функции соответствуют волновым функциям исходного гамильтониана, авторы нашли такую группу. Она оказалась изоморфной комплексной форме группы 0(5).

В заключение авторы благодарят С.С.Герштейна за ценные обсуждения.

Институт физики высоких энергий

Поступила в редакцию
11 июня 1976 г.

Литература

[1] Сб. "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц". Наукова думка, Киев, 1967, стр. 702.

[2] В.А.Фок. Zn. Phys., **98**, 145, 1935.

[3] Н.Я.Виленкин. "Специальные функции и теория представлений групп" М., изд. Наука, 1965, стр. 305.