Письма в ЖЭТФ, том 24, вып. 4, стр. 247 – 250 *20 августа 1976 г.*

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ $(\cos\phi - 1)_2$ И МАССИВНОЙ МОДЕЛИ ТИРРИНГА[1)]

П.П.Кулиш, Е.Р.Нисимов

Доказано существование бесконечного числа законов сохранения в массивной модели Тирринга, когда $\psi_\alpha(x)$ – элементы грассмановой алгебры, и отсутствие аномалий у квантовых токов.

Для модели с лагранжианом $L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + m^2/\beta^2(\cos\beta\phi - 1)$ [1] и массивной модели Тирринга [2] в квантовой теории справедлив замечательный факт – сохранение после рассеяния набора импульсов частиц в начальном состоянии и факторизация S-матрицы [3], если при квантовании остаются справедливыми классические законы сохранения. Нами показано, что это действительно имеет место и приведены рекуррентные соотношения для вычисления сохраняющихся токов в модели Тирринга, когда поля $\psi_\alpha(x)$ являются не c-числами [2], а элементами грассмановой алгебры.

1. Локальные сохраняющиеся токи для уравнения синус-Гордон имеют простой вид в переменных $\tau = (t + x)/2$, $\sigma = (t - x)/2$ и вычисляются из рекуррентных соотношений

$$j_\tau^{(n+1)} = \phi_\tau \partial_\tau (j_\tau^{(n)}/\phi_\tau) + (\beta^2/4)\sum_{k+l=n} j_\tau^{(k)} j_\tau^{(l)} + \phi_\tau^2 \delta_{n,0}; \quad \phi_\tau \equiv \partial\phi/\partial\tau,$$

$$j_\sigma^{(n+1)} = -2m^2/\beta^2\, \delta_{n,0} \cos\beta\phi + m^2/\beta\, (j_\tau^{(n)}/\phi_\tau)\sin\beta\phi; \quad \partial_\sigma j_\tau^{(n)} + \partial_\tau j_\sigma^{(n)} = 0.$$

Токи $j_\tau^{(n)}$ являются однородными функциями по ∂_τ степени $n + 1$, поэтому, несмотря на суперренормируемость теории, функции Грина токов $j_\tau^{(n)}$ требуют перенормировки. Как было отмечено в [4] это может привести к аномалиям в тождествах Уорда (ТУ) и нарушению классических законов сохранения. Используя квантовые уравнения движения в формализме N-произведений [5] с эффективным лагранжианом [6] $L =$

$$= \tfrac{1}{2} :((\partial_\mu\phi)^2 - m^2\phi^2): + :(\tilde{m}^2/\beta^2(\cos\beta\phi - 1) + m^2/2\,\phi^2):, \quad \tilde{m}^2 = m^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Delta_k\beta^{2k}$$

для тока $j_\tau^{(n)} \left(\partial_\sigma j_\tau^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-1} Y_m \partial_\tau^m (\phi_{\sigma\tau})\right)$ получаем дифференциальные ТУ.

$$< N_{n+2}[\partial_\sigma j_\tau^{(n)}](x) X> = - < N_n[\partial_\tau j_\sigma^{(n)}](x) X> + m^2 \sum_{l=0}^{n-1} < N_n[Y_l(\partial_\tau^l \phi -$$

$$- \{\partial_\tau^l \phi\})](x) X> - i \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{l=0}^{n-1} < N_{n-l}[Y_l](x)\hat{X}> \partial_\tau^l \right) \delta(x - y_j);$$

1) Результаты работы докладывались на IV Международном совещании по нелокальной квантовой теории поля, Алушта, апрель, 1976 г.

$$X = \prod_{j=1}^{k} \phi(y_j), \qquad \hat{X} = \prod_{i \neq j} \phi(y_i).$$

где индекс a при знаке нормального произведения $N_a[B](x)$ определяет порядок вычитаний в подграфах, содержащих вершину, отвечающую оператору $B(x)$, а фигурные скобки – два сверхвычитания. Интегрируя по d^2x можно преобразовать интеграл от аномальных членов

$$\sum_{l=0}^{n-1} \int d^2x < N_n[\,Y_l\,(\partial_\tau^l \phi - \{\partial_\tau^l \phi\})\,](x)\, X > \; = \; \sum_{l=1}^{n} \int d^2x < N_n\,[B_l(\phi - \{\phi\})](x) X >.$$

Мономы B_l однородны по ∂_τ степени n и не меньше третьей степени по ϕ. Используя тождества Циммермана и квантовые уравнения движения получаем для аномальных членов неоднородную систему уравнений, определитель которой при достаточно малых β отличен от нуля. Неоднородные члены системы – швингеровские члены дифференциальных ТУ вида $< N_n[B_l](y_j)\hat{X} >$. Таким образом в интегральных ТУ остаются только швингеровские члены и переходя на массовую поверхность в импульсном представлении получаем классические законы сохранения $\Sigma(p_j^{\text{in}})^n = \Sigma(p_j^{\text{out}})^n$; $n = 1, 2, \ldots$

2. Уравнения движения массивной модели Тирринга

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = \lambda/_2\, \gamma^\mu \psi(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi),$$

когда $\psi_a(x)$ – элементы грассмановой алгебры A с антикоммутирующими образующими $\psi_a(x)$, $\psi_a^*(x)$, $a = 1, 2$, а – инволюция в A, тоже удобно рассматривать в переменных σ, τ. Сохраняющиеся токи вычисляются из рекуррентных соотношений ($\psi_a^* \psi_a = \rho_a$)

$$b_{n+1} = \partial_\sigma b_n - i\lambda\rho_1 b_n - 2i\lambda \sum_{k+l=n,\; k\neq 0} b_k^* \psi_1 b_l + \psi_1 \delta_{n+1,0}; \quad b_n = 0, \; n < 0,$$

зависимость b_n от τ определяется соотношениями

$$\partial_\tau b_{n+1} = -m^2 b_n - i\lambda\rho_2 b_{n+1} + 2\lambda m \sum_{k+l=n} b_k^* \psi_2 b_l, \quad n \geqslant 0,$$

а классические законы сохранения имеют вид

$$\partial_\tau(\psi_1^* b_n - h.c.) = im\partial_\sigma(\psi_2^* b_{n-1} + h.c.).$$

Используя квантовые уравнения движения с эффективным лагранжианом

$$L = {}^i/_2(1+b)\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial_\mu}\gamma^\mu\psi - (m+a)\bar{\psi}\psi - (\lambda+c)/_4\,(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2,$$

где a, b, c – конечные перенормировки массы, волновой функции и заряда, получаем дифференциальные ТУ для тока

$$< N[\partial_r (\psi_1^* b_n - h.c.) - im/(1+b)\,\partial_\sigma(\{\psi_2^*\} b_{n-1} + h.c.)](x)\, X > =$$

$$= \frac{m}{(1+b)^2} < N[m(\{\{\psi_1^*\}\} b_{n-1} - \psi_1^* \{\{b_{n-1}\}\} + \psi_1^* A_n) + 2a(\{\psi_1^*\} b_{n-1} -$$

$$- \psi_1^* \{b_{n-1}\} + \psi_1^* B_n)](x) X > +$$

$$+ \frac{(\lambda + c)m}{(1+b)^2} < N[\{\psi_2^* \rho_1\} b_{n-1} - \{\psi_2^*\} \rho_1 b_{n-1} + \psi_1^* C_n - h.c.](x)\, X > + \dots;$$

$$X = \prod_j \psi(x_j) \prod_i \bar{\psi}(y_i)\,.$$

Операторы A_n, B_n, C_n вычисляются из рекуррентных соотношений, следующих из соотношений для b_n и уравнений движения, а каждая фигурная скобка соответствует одному сверхвычитанию. Многоточие означает опущенные швингеровские члены, которые в интегральном ТУ, после перехода на массовую поверхность, дают

$$(1 + c(\lambda, m))\Big(\sum_{j=1}^{m} (p_j^{\text{out}})^n - \sum_{j=m+1}^{l} (p_j^{\text{in}})^n\Big) < p_1, \dots p_m; \text{out}\, | p_{m+1}, \dots p_l; \text{in}>.$$

Анализ аномальных членов в интегральных ТУ проводится с использованием тождеств Циммермана [5]. Однако, в отличие от уравнения синус-Гордон, массивная модель Тирринга является лишь перенормируемой теорией и явно вычислить аномальные члены не удается. Тем не менее имеется целый ряд упрощений, связанных с фермионным характером поля $\psi_\alpha(x)$, лоренцевой ковариантностью и C-, P-инвариантностью, которые позволяют провести анализ аномальных членов до конца и показать, что они сводятся, как и в случае уравнения синус-Гордон, к соответствующим швингеровским членам. Таким образом, классические законы сохранения выполняются и в квантовой теории. Эквивалентность уравнения синус-Гордон и массивной модели Тирринга [7] позволяет утверждать, что и в солитонном секторе квантовой теории $(\cos\phi - 1)_2$ отсутствуют аномалии.

К моменту отправления работы в печать нам стали известны препринты [8], где приведены примеры сохраняющихся токов. Их выражения для $J_\mu^{(n)}$, $n = 3, 5, 7$ совпадают с токами, получающимися из рекуррентных соотношений.

В заключение выражаем благодарность Л.Д.Фаддееву, И.Я.Арефьевой и В.Е.Корепину за стимулирующие обсуждения.

Математический институт
им. В.Л.Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
28 июня 1976 г.

Литература

[1] Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 21, 160, 1974.

[2] А.В.Михайлов. Письма в ЖЭТФ, 23, 356, 1976.

[3] П.П.Кулиш. ТМФ, 26, 198, 1976.

[4] R.Flume. Preprint, DESY 75/33, 1975.

[5] W.Zimmermann. Ann. Phys., 77, 536, 1973.

[6] И.Я.Арефьева, В.Е.Корепин. Письма в ЖЭТФ, 20, 680, 1974.

[7] S.Coleman. Phys. Rev., D11, 2088, 1975.

[8] B.Berg, M.Karowski, H.Thun. Preprint, FUB/HEP, 76/5, 1976; R.Flume, P.Mitter, N.Papanikolaou. Preprint, CERN, 1976.