Письма в ЖЭТФ, том 24, вып. 5, стр. 323 – 327 *5 сентября 1976 г.*

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СОЛИТОНОВ В МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ ϕ_2^4

Б.С.Гетманов

В численных экспериментах обнаружено и изучено новое квазистационарное связанное состояние трех солитонов классического скалярного поля Хиггса. Детально исследовано связанное состояние, найденное в работе [1] и предложено выражение качественно верно описывающее его динамику. Предсказано и найдено связанное состояние солитонов нелинейного уравнения Клейна – Гордона.

Недавно [1] было обнаружено квазистабильное долгоживущее осциллирующее связанное состояние двух солитонов в модели теории поля с уравнением движения (уравнение Хиггса):

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} - 2m^2(1 - \lambda^2\psi^2)\,\psi = 0. \qquad (1)$$

Однако при этом остались не выясненными вопросы о времени жизни этого состояния ("биона"), о величине граничной скорости "захвата" солитонов (по этому поводу имеются неясные и противоречивые данные [2]), а также было сделано утверждение об отсутствии других связанных многосолитонных состояний. В настоящей работе описано новое квазистабильное связанное состояние трех солитонов ("тритон"), детально изучены свойства и выявлена высокая регулярность поведения тритона и биона. Точное локализованное решение уравнения (1), обладающее частицеподобными свойствами – солитон ("кинк") имеет вид

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{th}[m\gamma(x - x_0 - vt)],\ \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}. \qquad (2)$$

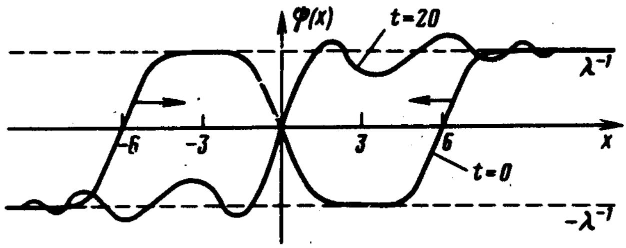

Рис. 1. Тритон при $t = 0$ и $t = 20$ ($v = 0,6$)

Рассмотрим начальное состояние, описывающееся функцией (рис. 1)

$$\psi = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}\mathrm{th}[m\gamma_i(x - x_{gi})];$$

$$x_{0,j} = x_{0,j-1} + \Delta x_0;\ v_j = v_{j-1} + \Delta v,\ j = 2, 3. \qquad (3)$$

Качественно ясно, что такое состояние – "деформированный кинк" – нестабильно; в силу того, что взаимодействие между солитонами разного знака носит характер притяжения, выгодным (во всяком случае при малой Δv) является переход в состояние (2) с испусканием избытка энергии в виде волн малой амплитуды (что возможно, поскольку система (1) не является вполне интегрируемой). Эволюцию состояния (3) удобно изучать в системе центра инерции, при $v_2 = 0$, $x_{0,2} = 0$. Кроме того, преобразование $\lambda\psi \to \psi$, $mx \to x$, $mt \to t$ делает уравнение (1) инвариантным относительно параметров λ, m. Соответственно инвариантны и результаты численного счета в безразмерных переменных. В численных экспериментах (ЧЭ) обнаружено, что при скорости $v = v_1 = -v_3 < v_{гр}$, $v_{гр} = 0,75 \pm 0,03$ эволюция состояния (3) приводит к образованию пульсирующего связанного состояния. Пульсации носят вполне регулярный характер и сопровождаются мощным (на начальной стадии) излучением, что приводит к плавному уменьшению частоты и амплитуды пульсаций. При $t \to \infty$ период пульсаций стремится к $T_{min} = \pi/m$. Обработка результатов ЧЭ показала, что уменьшение энергии тритона за счет потерь на излучение на регулярной стадии процесса можно описать формулой (отклонение от экспериментальной кривой не превышает 5% на интервале $t = 400$):

$$E(t) = E_c + 2E_0 \exp(-\delta_1 t), \tag{4}$$

где $E_0 = M = 4m^2/3\lambda^2$ – масса солитона, $\delta_1 = (3 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-2} m$.

Отсюда интенсивность излучения

$$I(t) = \frac{dE}{dt} = -8 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{\lambda^2} \exp(-\delta_1 t). \tag{5}$$

Таким образом, тритон оказывается относительно долгоживущим образованием.

Теперь рассмотрим динамику состояния, задаваемого начальной функцией [1]

$$\psi = \frac{1}{\lambda} \{ \operatorname{th}[m\gamma(x + x_0)] - \operatorname{th}[m\gamma(x - x_0)] - 1 \}. \tag{6}$$

В тщательно поставленных численных экспериментах найдена граничная скорость солитонов (ниже которой происходит образование биона), оказавшаяся равной $v_{гр} = 0{,}2 \pm 0{,}01$. Кроме того выяснилось, что бион является значительно более долгоживущим образованием, чем тритон, и что на установившейся стадии колебаний последние обладают исключительной регулярностью. График осцилляций амплитуды поля $A(t)$ в точке $x = 0$ имеет характерную форму, изображенную на рис. 2. Имеет место также слабая модуляция основной частоты, с периодом, значительно большим основного, и сложным образом зависящим от времени. Малость декремента затухания колебаний биона, некоторое нарушение регулярности процесса на начальной стадии, обусловленное "высвечиванием" избытка кинетической энергии солитонов, и отмеченная выше модуляция сильно затрудняют определение величины декремента затухания и "времени жизни" биона. Последнее удалось определить только после того, как нами было найдено аналитическое выражение, с весьма удовлетворительной точностью описывающее динамику биона:

$$\psi = \frac{1}{\lambda} \; \frac{\operatorname{tg}^2 a \operatorname{sech}^2(m \sin a\, x) \cos^2(m \cos a\, t) - 1}{\operatorname{tg}^2 a \operatorname{sech}^2(m \sin a\, x) \cos^2(m \cos a\, t) + 1}. \tag{7}$$

Если считать a медленно убывающей (в силу слабости излучения) функцией времени в интервале $t \in [\pi/2, 0]$, то формула (7) дает качественное описание эволюции начального состояния при $v < v_{гр}$ в *пренебрежении излучением*, вплоть до трансформации биона в малые колебания около нижнего вакуума $\psi = \lambda^{-1}$ при $a \to 0$. Спектр этих колебаний имеет вид $\omega^2_{лин} = k^2 + 4m^2$; из (7) видно, что частота локализованных колебаний лежит в запрещенной области спектра гармонических колебаний, и при $a \to 0$ частота $\omega_{\text{нел}} = 2m\cos a \to 2m$, т.е. к нижней границе спектра. При этом амплитуда колебаний стремится к нулю, а область пространственной локализации – к бесконечности.

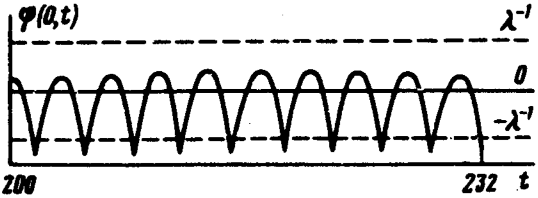

Рис. 2. Колебания поля в центре биона в установившемся режиме

С помощью (7), выбирая произвольное $a \in [\pi/2, 0]$, в ЧЭ с большой точностью задается начальное состояние биона в соответствующий момент жизни биона и изучаемая система сразу входит в самосогласованный регулярный режим.

В итоге зависимость энергии биона от времени на регулярной стадии удалось описать с помощью формулы

$$E(t) = 2M\exp(-\delta_2 t), \qquad \delta_2 = (4 \pm 0{,}3)\cdot 10^{-4}m. \tag{8}$$

Таким образом, время "полураспада" (уменьшение энергии вдвое) равно $\approx 1750m^{-1}$!

Метод получения формулы (7) (фактически метод приближенного описания многосолитонных состояний в некотором классе двумерных полиномиальных моделей теории поля), а также более детальное сравнение (7) с результатами ЧЭ, будут изложены в другом месте. Отметим здесь только, что с помощью этого метода (основанного на факте "близости" рассматриваемых уравнений к уравнению "SINE-GORDON"), нами также предсказано, а затем обнаружено в ЧЭ связанное состояние солитонов нелинейного уравнения Клейна – Гордона

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + m^2(1 - 2\lambda^2\psi^2)\psi = 0, \tag{9}$$

близкое по свойствам к (7) и описываемое выражением

$$\psi = \frac{1}{\lambda}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{sech}(m\sin a\,x)\cos(m\cos a\,t)}{\mathrm{tg}^2 a\,\mathrm{sech}^2(m\sin a\,x)\cos^2(m\cos a\,t) + 1}, \quad a \in [\pi/2, 0] \tag{10}.$$

Замечательно то, что состояние (10) нельзя получить в ЧЭ по столкновению солитонов уравнения (9), так как последние неустойчивы относительно малых возмущений начальных данных. Однако оно оказалось устойчивым в области $\sin a \leqslant 0{,}2$, причем интенсивность его излучения сильно растет с ростом амплитуды. Таким образом, уже на классическом уровне уравнения модели ϕ_2^4 обладают богатым спектром частицеподобных решений с нетривиальной динамикой.

Достоверность приведенных в настоящей работе экспериментальных данных гарантировалась сохранением во всех ЧЭ интеграла движения – полной энергии – с точностью не хуже 10^{-4}, а также надежно установленным фактом отсутствия влияния на результаты эффектов, связанных с граничными условиями (по поводу важности внимания к этим эффектам см., в частности [3]).

Автор искренне благодарен Д.В.Ширкову за весьма ценные и стимулирующие беседы, внимание и поддержку, а также И.Л.Боголюбскому и В.Г.Маханькову за полезные обсуждения.

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию
2 августа 1976 г.

Литература

[1] А.Е.Кудрявцев. Письма в ЖЭТФ, 22, 17, 1975.

[2] П.П.Кулиш. Докл. на II школе по физике элементарных частиц, София, сентябрь. 1975 г.

[3] Х.О.Абдуллоев, И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков. ОИЯИ Р9-7992, Дубна, 1974.