Письма в ЖЭТФ, том 24, вып. 6, стр. 346 – 348 *20 сентября 1976 г.*

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ БЕССИЛОВОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

С.И.Сыроватский

Во внешних атмосферах звезд и планет вследствие более быстрого (обычно барометрического) закона убывания давления P по сравнению со степенным спадом мультипольных компонент магнитного поля $\mathbf{B}$ обычно выполняется условие $P << B^2/8\pi$, т.е. мал плазменный параметр $\beta = 8\pi P/B^2$. При этом условии состояние плазмы с магнитным полем хорошо описывается нулевым приближением по β, когда давление P вообще не учитывается. В статическом случае этому соответствует бессиловое магнитное поле [1]

$$[\mathbf{B} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{B}] = 0, \quad \mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0 \qquad (1)$$

с токами, текущими вдоль магнитных силовых линий.

С другой стороны, именно во внешних атмосферах наблюдаются такие специфические вспышечные процессы в плазме, как солнечные и звездные вспышки, магнитосферные суббури, ускорительные процессы в магнитосфере Юпитера. В простейшем случае плоского двухмерного бессилового поля, когда поле просто потенциальное, этот вспышечный процесс связывается с нейтральным токовым слоем (подробнее см. [2]). Такие слои, как было показано для двухмерного поля в [3], возникают в хорошо проводящей плазме на месте особых нулевых точек магнитного поля, т.е. точек, в которых $\mathbf{B} = 0$, но электрическое поле $\mathbf{E}$ в силу граничных условий не равно нулю.

Ниже будет показано, что этот результат сохраняется для бессилового поля общего вида. Именно, в произвольном трехмерном бессиловом магнитном поле точки, в которых $\mathbf{B} = 0$, но в силу граничных условий $\mathbf{E} \neq 0$, являются особыми в том смысле, что магнитогидродинамическая задача о течении плазмы в окрестности этих точек в общем случае не имеет непрерывных решений. По аналогии с двухмерным случаем естественно считать, что в таких точках должны возникать поверхности разрыва – токовые слои. Подчеркнем, что всюду речь идет о приближении идеальной проводимости, которому достаточно хорошо удовлетворяют как космическая плазма, так и быстрые процессы в лабораторной плазме.

Для доказательства достаточно, фактически, показать, что точки с указанными свойствами могут действительно существовать. Мы проведем это доказательство для случая адиабатически медленных деформаций бессилового поля, когда

$$\epsilon = v_0 / v_A << 1, \qquad (2)$$

где v_0 – характерная скорость плазмы, $v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ – альвеновская скорость.

Выберем в качестве единиц длины, скорости, времени, плотности и напряженностей магнитного и электрического полей значения:

$$R_o,\ v_o,\ t_* = R_*/v_o,\ \rho_o,\ B_o,\ v_oB_o/c. \tag{3}$$

Тогда, при $\beta = 0$, получаем безразмерные уравнения задачи в МГД приближении:

$$\epsilon^2 d\mathbf{v}/dt = \rho^{-1}[\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\times\mathbf{B}], \tag{4}$$

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E},\quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]/c, \tag{6}$$

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\,\rho\mathbf{v} = 0, \tag{7}$$

где $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. Раскладывая все величины по степеням ϵ^2, например, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \epsilon^2\mathbf{v}_1 + \ldots$, выпишем уравнения, содержащие члены нулевого приближения. Из них только уравнение

$$\rho_o\frac{d\mathbf{v}_o}{dt} = [\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_o] + [\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_o\times\mathbf{B}_1] \tag{8}$$

содержит члены следующего приближения (члены в правой части). Однако они легко исключаются при скалярном умножении уравнения (8) на $\mathbf{B}_o$. В результате получается замкнутая система уравнений для величин нулевого приближения:

$$[\mathbf{B}_o\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_o] = 0,\quad \mathrm{div}\,\mathbf{B}_* = 0, \tag{9}$$

$$\mathbf{B}_o\,d\mathbf{v}_o/dt = 0, \tag{10}$$

$$\mathbf{E}_o + [\mathbf{v}_o\times\mathbf{B}_o]/c = 0, \tag{11}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_o = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{B}_o}{\partial t}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\rho_o}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho_o\mathbf{v}_o = 0. \tag{13}$$

Уравнение (9) определяет вектор равновесного магнитного поля $\mathbf{B}_o$. Как показано в [4], задача определения бессилового поля по заданным значениям вектора поля на границе области имеет единственное решение при условии выполнения некоторых ограничений на допустимые граничные значения вектора $\mathbf{B}_o$ (условия в точках границы, связанных одной и той же силовой линией). Решение уравнения (9) определяет $\mathbf{B}_o = \mathbf{B}_o(\mathbf{r}, t)$, где зависимость от времени параметрическая, через граничные условия.

Уравнение (10) определяет компоненту скорости вдоль силовой линии (ускорение в этом направлении отсутствует), а уравнение (11) – поперечную компоненту через известные $\mathbf{B}_o$ и $\mathbf{E}_o$. Как уже говорилось, поле $\mathbf{B}_o$ определяется независимо из уравнения (9). При этом уравнение (12) определяет вихревую часть электрического поля $\mathbf{E}_0$. Для дальнейшего существенно, что потенциальная часть поля $\mathbf{E}_0$ определяется независимыми граничными условиями: распределением нормальной компоненты вектора $\mathbf{E}_0$ или соответствующей плотности электрического заряда на границе области. Наконец, плотность плазмы выражается через известную скорость v_0 уравнением (13).

Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны работе [3]. Именно, граничные условия для полей $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{E}_0$ в общем случае допускают существование внутри области точек, в которых $\mathbf{B}_0 = 0$ (нулевые точки), в том числе и таких, в которых $\mathbf{E}_0 \neq 0$ (особые нулевые точки). Последнее вытекает из отмеченной выше независимости определения потенциальной части электрического поля $\mathbf{E}_0$. Однако существование особых нулевых точек противоречит уравнению (11). Это значит, что система уравнений (8) – (13) не имеет непрерывных решений в окрестности особых нулевых точек. Для того, чтобы получить решение граничной задачи, можно поступить двояким образом: либо выйти за рамки использованного приближения путем учета сглаживающих диссипативных членов, либо, сохраняя приближение идеальной среды, ввести соответствующие поверхности разрыва. На этих поверхностях такие физические величины, как плотность плазмы и векторы магнитного поля и скорости могут претерпевать скачки, оставаясь ограниченными. В этом отношении имеется полная аналогия с обычной гидродинамикой, в которой появление скачков в идеальной среде физически соответствует необходимости учета диссипативных членов для построения непрерывного решения.

Очевидно, что в силу требования ограниченности магнитного поля особенности в бессиловом поле не могут иметь характер линейных токов. Таким образом, как и в двухмерном случае, на месте особых нулевых точек бессилового магнитного поля должны возникать поверхности разрыва – токовые слои.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2 июля 1976 г.

Литература

[1] S.Lundquist. Arkiv for Fys., 2, 361, 1950.

[2] С.И.Сыроватский. Известия АН СССР, сер. физ., 39, 359, 1975.

[3] С.И.Сыроватский. ЖЭТФ, 60, 1727, 1971.

[4] М.М.Молоденский. Астроном. ж., 45, 4, 1968.