Письма в ЖЭТФ, том 24, вып. 10, стр. 576 – 579 *20 ноября 1976 г.*

О ТРЕХМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СКАЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ХИГГСА

Н.А.Воронов, И.Ю.Кобзарев

Для скалярного уравнения со спонтанным нарушением симметрии получены сферически-симметричные периодические решения (изохроны). Приведен ряд доводов в пользу того, что наблюдавшиеся ранее в численном эксперименте периодические образования являются изохронными возбуждениями скалярного поля.

В настоящее время широко обсуждается возможность описания элементарных частиц классическими решениями теории поля (см., например, [1 – 2]). С нашей точки зрения особый интерес представляет вопрос о мезонах глюонного типа, которые в первом приближении не содержат пар кварк-антикварк [3].

В модели адронов, предложенной Винчиарелли и Дреллом [4] глюонное поле описывается уравнением

$$\Box u = 4u(1 - u^2). \qquad (1)$$

Возможность существования глюонных состояний, описываемых (1), обсуждалась в [5]. В работе [6] численно были обнаружены сферически-симметричные периодические слабоизлучающие образования, названные авторами "одномасштабными сгустками". На возможность существования решений такого типа было указано ранее в [7].

Классические периодические решения в одномерном случае для уравнения (1) искались в работе [2] в аналитической форме. Поскольку ряд для решения, полученный в этой работе, является асимптотическим, то вычисление, проведенное в ней, дает лишь указание на возможность существования периодического решения. В численном эксперименте для одномерного уравнения (1) были найдены долгоживущие состояния [8];

есть основание предполагать, что эти состояния описываются решениями типа [2] (или близки к ним).

Если поверить в корректность метода [2][1], то с его помощью можно получить периодические решения и в трехмерном случае. В сферически-симметричном уравнении (1) произведем следующие преобразования

$$u = 1 + z; \qquad \tau = \frac{2\sqrt{2}t}{\sqrt{1+\epsilon^2}}; \qquad \rho = \frac{2\sqrt{2}\epsilon r}{\sqrt{1+\epsilon^2}}, \tag{2}$$

где ϵ — некоторый произвольный параметр. Функцию r мы, следуя [2], будем искать в виде разложения по параметру ϵ

$$z = \epsilon^2 g_0(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} [\epsilon^{2n-1} f_{2n-1}(\rho)\sin(2n-1)\tau + \epsilon^{2n} g_{2n}(\rho)\cos 2n\tau], \tag{3}$$

причем функции g_i и f_i также разлагаются в ряд по ϵ^2

$$g_i(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} g_i^{(j)}(\rho)\,\epsilon^{2j}; \quad f_i(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} f_i^{(j)}(\rho)\,\epsilon^{2j}. \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (1), получаем для первых членов разложения (4) следующие выражения

$$g_0^{(0)} = -\frac{3}{4}[f_1^{(0)}]^2; \quad g_2^{(0)} = -\frac{1}{4}[f_1^{(0)}]^2; \quad f_3^{(0)} = -\frac{1}{16}[f_1^{(0)}]^3 \text{ и т. д.} \tag{5}$$

а для $f_1^{(0)}$ имеем уравнение

$$\Delta_\rho f_1^{(0)} - f_1^{(0)} + \frac{3}{2}[f_1^{(0)}]^3 = 0 \tag{6}$$

с граничными условиями $f_1^{(0)}(\infty) = 0$; $f_1^{(0)}(0) < \infty$; $\left.\frac{d}{d\rho} f_1^{(0)}\right|_{\rho=0} = 0$.

В работе [10] было доказано для уравнения типа (6) существование бесконечного множества решений $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих граничным условиям $u_n(0) < \infty$, $u_n(\infty) = 0$ и имеющих на интервале $(0, \infty)$ $n - 1$ нулей. Решение для $n = 1$ было найдено численно Сингом [11] для уравнения, приводящегося к (6) масштабным преобразованием.

Можно показать, что ограниченные в нуле решения уравнения (6) имеют в нуле производную равную нулю. В самом деле, ограниченность $f_1^{(0)}$ означает, что вблизи нуля

$$f_1^{(0)} = A\rho^a + 0(\rho^a), \tag{7}$$

причем $a \geqslant 0$. Подставляя (7) в (6), мы видим, что равенство возможно только при $a = 0$. Следующий член разложения автоматически получается $\sim \rho^2$, т. е. что и требовалось доказать.

---

[1] Данный метод был впервые применен в [9] для другого уравнения.

Вычисление следующих членов ряда (4) в явном виде провести не удается, поскольку не известно решение (6). Заметим, что в плоском случае члены ряда (4) очень быстро растут с j для фиксированной точки вблизи $x = 0$ (по-видимому, быстрее, чем $j!$).

Решение (2) – (4), если оно существует, обладает одним интересным свойством. Вернемся в (3) к старым переменным r и t. Тогда z периодично с частотой

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}, \qquad (8)$$

причем ϵ – характеризует величину амплитуды (3). При малой амплитуде, т. е. при малых ϵ, период решения с точностью ϵ^2 не зависит от амплитуды, в связи с этим мы предлагаем называть решения (2) – (4) изохронными возбуждениями скалярного поля или изохронами. Ясно, что это свойство не зависит от числа пространственных измерений уравнения (1).

Изохронность колебаний при малой амплитуде, по-видимому, наблюдается в численном эксперименте. Согласно (8) период колебаний равен

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \epsilon^2} \approx 2{,}2 + 0(\epsilon^2).$$

На опыте мы имели изохроны с периодами $T = 2{,}5 \div 2{,}7$. Найденные для них ϵ достаточно хорошо согласуются с экспериментальными амплитудами. Аналогичная картина наблюдается и в одномерном случае.

Сравнение с результатами численных экспериментов позволяет сделать вывод, что периодические образования, найденные в [6] описываются решениями типа (2) – (4) или близки к ним, а это означает корректность метода [2]. Заметим, что в использованном приближении мы не получаем затухания изохронных колебаний, которое должно иметь место в силу излучения.

Ответ на вопрос, соответствуют ли рассмотренным здесь изохронным возбуждениям реальные глюонные мезоны зависит от применимости модели Винчиарелли – Дрелла для описания реальных адронов, а также от того, будут ли соответствовать классическим изохронным решениям квантовые состояния мезонного типа.

Авторы признательны Т.И.Беловой и Н.Б.Конюховой за численные расчеты и полезные обсуждения.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
17 сентября 1976 г.

Литература

[1] Л.Д.Фадеев. Письма в ЖЭТФ, 21, 148, 1975; А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 20, 430, 1974; И.С.Шапиро. Письма в ЖЭТФ, 21, 624, 1975; ЖЭТФ, 70, 2050, 1976.

[2] R.Dashen, B.Hasslacher, A.Neveu. Phys. Rev., D11, 3424, 1975.

[3] M.Fitsch, M.Gell-Mann. Proc. 16 conf. on ligh energy physics, 1972.

[4] P.Vinciarelly. Nucl. Phys., B89, 463, 1975; W.A.Bardeen, M.Chanowitz, S.D.Drell, M.Weinstein, T.-M.Yan. Phys. Rev. D11, 1094, 1975.

[5] И.Ю.Кобзарев. Материалы III школы ИТЭФ, вып. 1, стр. 27, 1975.

[6] И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков. Письма в ЖЭТФ, 24, 15, 1976.

[7] Н.А.Воронов, И.Ю.Кобзарев, Н.Б.Конюхова. Письма в ЖЭТФ, 22, 590, 1975.

[8] А.Е.Кудрявцев. Письма в ЖЭТФ, 22, 178, 1975.

[9] А.М.Косевич, А.С.Ковалев. ЖЭТФ, 67, 1793, 1974.

[10] G.Ryder. Pacific j. Math., 22, 477, 1967.

[11] J.L.Synge. Proc. Royal Irish Acad., 62, 1961.