

ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА – ГОРДОНА

И.Л. Боголюбский

Получен счетный набор осциллирующих сферически-симметричных частицеподобных решений уравнения Клейна – Гордона с кубической нелинейностью. Моделируемые или протяженные частицы оказываются слабоизлучающими и долгоживущими.

В последние десятилетия предпринимались многочисленные попытки найти частицеподобные решения (ЧПР) релятивистски-инвариантных нелинейных полевых уравнений (см., например, обзор [1]).

В данной работе мы ограничимся рассмотрением скалярных действительных полей, подчиняющихся уравнению Клейна – Гордона с кубической нелинейностью:

$$u_{,tt} - \Delta u + u - u^3 = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) имеет нетривиальные установившиеся решения – плоские одномерные солитоны [2] и сферически-симметричные (s, s) ЧПР [3, 4]. Однако эти решения неустойчивы [5, 6]. С другой стороны, в рамках уравнения (1) в (x, t) – случае ($\Delta \rightarrow \partial^2 / \partial x^2$) аналитически описаны устойчивые¹⁾ самолокализованные нелинейные колебания [9] (назовем их для краткости "пульсонами").

¹⁾ В численных экспериментах мы наблюдали формирование плоских пульсонов из близких к ним осциллирующих полевых сгустков.

Для физики элементарных частиц большой интерес представляют, конечно, пространственные ЧПР. Первый пример долгоживущих ss -пульсонов был обнаружен в работе [10] в результате исследования уравнения для поля Хиггса. Их амплитуда $c(t)$ медленно уменьшается вследствие слабого излучения, а время жизни $\tau \sim 10^3$. В настоящей работе, применяя метод Фурье при наличии малого параметра ($u^2 \ll 1$) [9] и используя ЭВМ, мы получим и исследуем ss -пульсоны уравнения (1).

Будем искать решение (1) в виде

$$u(r, t) = a(r) \cos \omega t + b(r) \cos 3\omega t + \dots \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), приходим к нелинейной задаче на собственные значения:

$$a_{rr} + \frac{2}{r} a_r + \frac{3}{4} a^3 = \lambda a, \quad \lambda = 1 - \omega^2, \quad (3)$$

$$a_r(0) = 0, \quad a(\infty) = 0.$$

Пусть $y(r)$ – ее решение при $\lambda = 1$. Нетрудно убедиться, что тогда $y_\lambda = \sqrt{\lambda} y(\sqrt{\lambda} r)$ – решение (3) при заданном $\lambda = 1 - \omega^2$. Введем $A = \sqrt{3/4} a$. Получающееся для переменной A уравнение,

$$A_{rr} + \frac{2}{r} A_r - A + A^3 = 0 \quad (4)$$

при граничных условиях $A_r(0) = 0, A(\infty) = 0$ имеет счетное множество решений $A_i(r), i = 1, 2, \dots, n, \dots$, причем i -е решение имеет $(i - 1)$ нулей; $A_1(0) \approx 4,34 < A_2(0) \approx 14,10 < A_3(0) \approx 29,13 < \dots < A_n(0) < \dots$ [3,4].

Таким образом, функции

$$u_i(r, t) = \sqrt{\frac{4}{3}} u_0 A_i(k u_0 r) \cos(\sqrt{1 - u_0^2} t) = u_m \frac{A_i(k u_0 r)}{A_i(0)} \cos(\sqrt{1 - u_0^2} t), \quad (5)$$

$$k = 1$$

с точностью порядка $u_m^2 \ll 1$ являются решениями уравнения (1) и описывают ss -пульсоны. Выражение для $b(r)$ при $u_m^2 \ll 1$ легко находится

$$b(r) = -\frac{1}{12\sqrt{3}} u_0^3 A_i^3(u_0 r). \quad (6)$$

Динамика ЧПР (5) изучалась с помощью ЭВМ. Рассматривались первые три моды решений ($i = 1, 2, 3$) при амплитудах $u_m = 0,2; 0,4; 0,7$. При $u_m \leq 0,4$ результаты расчетов с высокой точностью (отклонение менее 1%) аппроксимируются формулой (5).

Особо отметим, что, во всяком случае, при $u_m^2 \ll 1$, излучение пульсона на бесконечность очень мало, и его время жизни $\tau \rightarrow \infty$ при $u_m^2 \rightarrow 0$. При задании в формуле (5) большей величины $u_m = 0,7$ амплитуда пульсаций $c(t)$ медленно уменьшается до $c(t) = 0,63$ к моменту $t = 80$, и характерный радиус пульсона R_c увеличивается.

Полевой сгусток, полученный сжатием (5) по оси r ($k > 1$) при фиксированной амплитуде, постепенно расплывается, так что $R_c \rightarrow \infty$ при

$t \rightarrow \infty$, а $c(t)$ монотонно уменьшается (рис. 1, а). Наоборот, сгусток более широкий, чем пульсон (5) ($k < 1$), начинает стягиваться к центру, а $c(t)$ увеличиваться (тем медленнее, чем ближе k к единице) до величины $u_{cr} \sim 1$; вслед за этим происходит "взрывное" (более быстрое, чем экспоненциальное) образование особенности поля, $|u(0, t)| \rightarrow \infty$ (рис. 1, б).

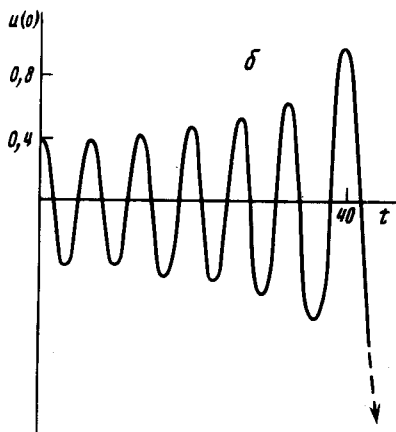
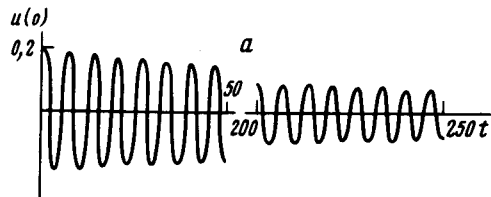


Рис. 1. Зависимость $u(0, t)$ при задании полевой функции $u(r, 0)$ формулой (5): а - $k = 1,3$, б - $k = 0,8$

Возможно, этот эффект объясняется видом кривой "потенциальной энергии" поля $U(u) = u^2 - (u^4/2)$. По-видимому, амплитуда пульсонов уравнения (1) u_{max} ограничена сверху константой $u^* \sim 1$: $u_{max} < u^* \sim 1$. Для их описания при $u_{max}^2 \lesssim 1$ необходимо учитывать следующие члены в разложении $a(r)$, $b(r)$, ... по степеням u_{max} [9]. Энергию пульсонов (5)

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty [u_r^2 + u_t^2 + u^2 - (u^4/2)] r^2 dr = \int_0^\infty H r^2 dr = \int_0^\infty \mathcal{H} dr \quad (7)$$

удобно вычислять в момент, когда $u_t = 0$; подставляя (5) в (7), имеем для i -й моды:

$$E_i = I_1^{(i)}(u_0) + I_2^{(i)}(u_0) - I_3^{(i)}(u_0) = u_0 (I_1^{(i)} - I_3^{(i)}) + u_0^{-1} I_2^{(i)}, \quad (8)$$

$$I_1^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{dy_i}{dr} \right)^2 r^2 dr; \quad I_2^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty y_i^2 r^2 dr; \quad I_3 = \frac{1}{4} \int_0^\infty y_i^4 r^2 dr.$$

В пределе $u_0 \rightarrow 0$ $E_i \approx u_0^{-1} I_2^{(i)}$, и основной вклад в плотность энергии поля $H(r, t)$ вносят члены u_t^2 и u^2 , сумма которых, $u_t^2 + u^2 = u_i^2(r, 0) \times (\cos^2 \omega t + \omega^2 \sin^2 \omega t)$, с точностью $\sim u_0^2$ постоянна при каждом r в силу того, что $\omega^2 = (1 - u_0^2) \rightarrow 1$ при $u_0^2 \rightarrow 0$. Поэтому распределения $H(r)$ и $\mathcal{H}(r)$ (рис. 2, а, б, в) - с этой же точностью не зависят от времени. Отметим, что, так как $u_0 = u_m / \sqrt{4/3} A_i(0)$, при заданной амплитуде

u_m распределение "массы" пульсона по радиусу сохраняется во времени тем точнее, чем больше номер моды i .

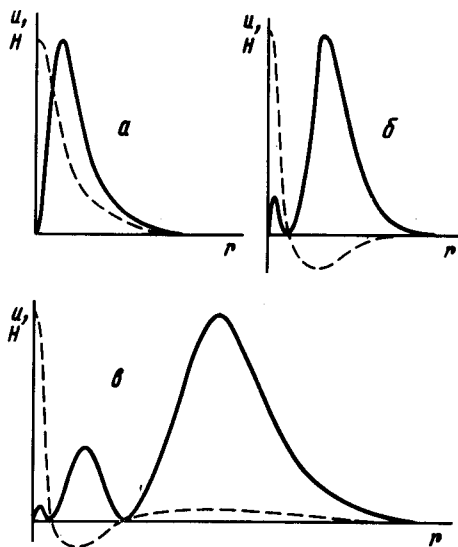


Рис. 2. Структура первых трех мод пульсонов (5): $a - i = 1$, $б - i = 2$, $в - i = 3$. ----- — функции $u_i(r, 0) = \sqrt{4/3} u_0 A_i(u_0 r)$, ———— — зависимости $\psi_i(r)$

Таким образом, отказываясь от требования стационарности полевой функции $u(r, t)$ удается построить счетный набор ЧПР уравнения (1), являющихся однополевыми моделями долгоживущих частиц с нулевым спином. В пределе $u_0 \rightarrow 0$ при одинаковых u_0 массы этих частиц $m_i = E_i$ относятся как $I_2^{(i)}$, а при одинаковых u_m как $I_2^{(i)}/A_i'(0)$ ($\approx 1:2:3:4:9: \dots$). Возможно, подобные осциллирующие решения окажутся полезными для описания ψ -бозонов (впервые солитонная модель этих частиц была предложена в работах [11], где рассматривалось одномерное уравнение для поля Хиггса).

Полученные результаты при $u^2 \ll 1$ непосредственно переносятся на случай синус-уравнения Гордона

$$u_{tt} - \Delta_{rr} u + \sin u = 0. \quad (9)$$

Однако в рамках (9), в отличие от (1), зафиксированы долгоживущие пульсоны амплитуды $c(t) > 1$, $c(t) \sim 2\pi$. Отметим, что пульсоны работы [10] также можно описывать при амплитудах $c(t) \ll 1$ методом Фурье.

Автор признателен Б.С.Гетманову, Е.П.Жидкову и В.Г.Маханькову за полезные обсуждения работы.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
13 октября 1976 г.

Литература

- [1] A. Barone, F. Esposito, C. I. Magee, A. C. Scott. Riv. Nuovo Cim., 1, 227, 1971.
[2] А.С.Давыдов, Н.И.Кислуха. ТМФ, 16, 100, 1973.

- [3] В.Б.Гласко, Ф.Лерюст, Я.П.Терлецкий, С.Ф.Шушурин. ЖЭТФ, 35, 452, 1958.
- [4] Е.П.Жидков, В.П. Шириков. ЖВМ и МФ, 4, 804, 1964.
- [5] R. N. Nova. Proc. Phys. Soc., 82, 201, 1963.
- [6] Л.Г.Заставенко. ПММ, 29, 430, 1965.
- [7] И.Л.Боголюбский, Е.П.Жидков, Ю.В.Катышев, В.Г.Маханьков, А.А.Расторгуев. ОИЯИ, Р2-9673, Дубна, 1976.
- [8] G. N. Derrick. J. Math. Phys., 5, 1252, 1964.
- [9] А.М.Косевич, А.С.Ковалев. ЖЭТФ, 67, 1793, 1974.
- [10] И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков. Письма в ЖЭТФ, 24, 15, 1976;
I. L. Bogolubsky, V. G. Makhankov. JINR, E2-9695, Dubna, 1976.
- [11] И.С.Шапиро. Письма в ЖЭТФ, 21, 624, 1975. ЖЭТФ, 70, 2050, 1976.
-