Письма в ЖЭТФ, том 23, вып. 4, стр. 224 – 228 *20 февраля 1976 г.*

НАДБАРЬЕРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ СОЛИТОНОВ

В.Ё.Корепин

В квантовой модели "sine-Gordon" вычислена амплитуда отражения солитона на антисолитоне. Этот процесс запрещен в классике. Вычислен потенциал взаимодействия солитонов в нерелятивистском пределе.

Лагранжиан модели имеет вид

$$L = \frac{1}{\gamma} \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu u)^2 - m^2 (1 - \cos u) \right].$$

Решения классического уравнения описаны в [1, 2]. Классическое рассеяние C (солитона) на A (антисолитоне) в СЦИ (системе центра инерции), описывающееся решением

$$u_{+-}(t\,,\,\phi_-) = 4\,\mathrm{arc\ tg}\left[\mathrm{cth}\,\phi_-\,\frac{\mathrm{sh}\,(mt\,\mathrm{sh}\,\phi_-)}{\mathrm{ch}\,(mx\,\mathrm{ch}\,\phi_-)}\right], \quad p_- = -p_+ = \frac{8m}{\gamma}\,\mathrm{sh}\,\phi_-\,, \tag{1}$$

происходит без отражения и квазиклассическая ($\gamma \to 0$) S-матрица имеет вид [3, 4]

$$< p_+',\ p_-' \,|\, S \,|\, p_+, p_- > \; = \delta\,(p_+ - p_+')\,\delta\,(p_- - p_-')D, \quad |\,D\,| \; = 1,$$

$$D = \exp\left\{i\,\frac{8\pi^2}{\gamma} + \frac{8}{\gamma}\int\limits_0^\pi d\theta \ln \frac{\xi e^{-i\theta} + 1}{\xi + e^{-i\theta}}\right\}, \quad \xi = e^{|\phi_- - \phi_+|}, \quad p_\pm = \frac{8m}{\gamma}\,\mathrm{sh}\,\phi_\pm\,. \tag{2}$$

Здесь $p_+(p_-)$ – импульс $C(A)$. Рассмотрим отражение C на A в квантовой системе в квазиклассическом пределе (при $\gamma \to 0$).

Задача о надбарьерном отражении в нерелятивистской квантовой механике решена в [5, 6]. Метод "мнимого времени" [7, 8] оказывается эффективным в нашей задаче, воспользуемся также методом комплексных траекторий в ФИ (функциональном интеграле) близким к [9].

Асимптотика при $t' \to \infty$, $t \to -\infty$ функции распространения, описывающей отражение, в p-представлении задается регуляризованным ФИ [3] (область интегрирования ограничена связями и дополнительными условиями)

$$G(t',t) = \delta(\,p_+ - p_-'\,)\,\delta\,(p_- - p_+')N\int_r \exp\{\,i\int\limits_t^{t'} L\,dt\,\}\prod_{x,\,t} du\,; \quad u|_t = u_{+-}(t\,,\phi);$$

$$u\,|_{t'} = -\,u_{+-}(t',\,\phi_-\,). \tag{3}$$

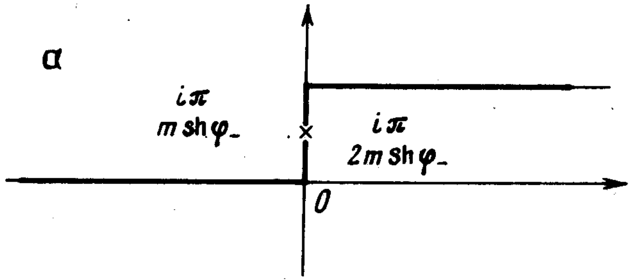
В (3) мы перешли в СЦИ. У ФИ (3) нет точки стац. фазы, но если сместить t' в комплексную плоскость, то она появится. Для $G(t',t)$ известно представление в виде ФИ при t' и t комплексных [10, 11]. ФИ не зависит от контура, соединяющего t' и t, в плоскости комплексного времени [12]. Выберем t' так, чтобы существовала КТ (классическая траектория) соответствующая отражению. Оказывается, что $\mathrm{Im}\,t' = \pi/m\,\mathrm{sh}\,\phi_-$. ФИ (3) определим вдоль контура рис. *а*. В этом случае существует две КТ –"*б*" и "*в*", сшивающие граничные условия (3). КТ "*б*" это предел значений (1) на контуре рис. *б*, КТ "*в*" это предел значений (1) на контуре рис. *в*. Для обеих КТ поворот происходит при $t = i\,\pi/2m\,\mathrm{sh}\,\phi_-$. Вычисляя ФИ (3) методом стац. фазы, получим ([9]):

$$G(t',t) = -\,i\exp\{\,is_б^{cl}\}\,\mathrm{det}_r^{1/2}\,\frac{\delta^2 s_б^{cl}}{\delta u(t')\,\delta u(t)} + i\exp\{\,is_в^{cl}\,\}\,\mathrm{det}_r^{1/2}\,\frac{\delta^2 s_в^{cl}}{\delta u(t')\,\delta u(t)}$$

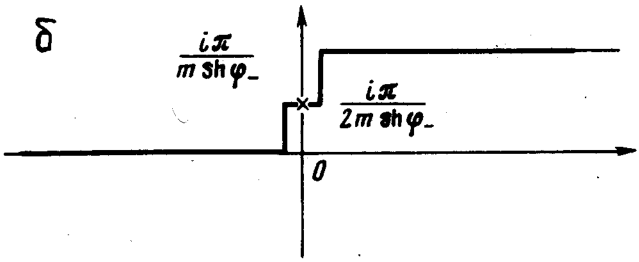
$$G(t',\,t) = \delta\,(p_+ - p_-')\,\delta\,(p_- - p_+')\,\widetilde{G}(t',\,t)\,. \tag{4}$$

Здесь $s^{cl} = \int\limits_t^{t'} L(u_{+-})\,dt$, первое (второе) слагаемое это вклад КТ "*б*"("*в*").

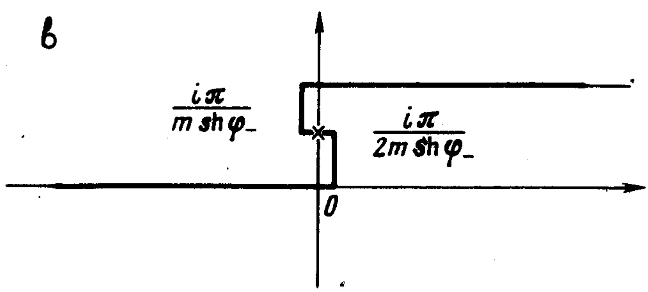
а



б



в



В (4) действие варьируется по величине КТ близкой к "*б*" или "*в*" в момент t' и t. В (4) $-i$ и i – вклады точки поворота. Явный вид $\delta u^{cl}(x,t)$ [13] показывает, что детерминанты (4) равны, вынесем их за скобки и не будем учитывать. Отношение вкладов КТ мы учли в "однопетлевом" приближении, все остальное – лишь в приближении "деревьев". Продолжим $G(t',t)$ по t' обратно на вещественную ось. Переход от $G(t',t)$ к S-матрице, как и в квантовой механике, сводится к замене s^{cl} на $s^{cl} - s_+^{cl} - s_-^{cl}$. Здесь $s_+^{cl}(s_-^{cl})$ – действие, вычисленное на свободном $C(A)$. Окончательно получаем, что поправка к S-матрице (2), соответствующая отражению, равна

$$\langle p_+', p_-' \,|\, S \,|\, p_+, p_- \rangle = -2\delta(p_+ - p_-')\,\delta(p_- - p_+')\,D \sin\frac{8\pi^2}{\gamma}\exp\left\{-\frac{8\pi}{\gamma}\,|\,\phi_- - \phi_+|\right\} \tag{5}$$

При $\gamma = 8\pi/n$ (n – целое) отсутствует отражение и происходит распад n-го связанного состояния C и A [13, 3], что напоминает поведение частицы в НП (нерелятивистском потенциале) $B/\,\mathrm{ch}^2(ar)$. Отсутствие отражения подтверждает гипотетический вид матрицы рассеяния C

на A при $\gamma = 8\pi/n$ [3]:

$$< p_+', p_-' \,|S|\, p_+, p_- > = \delta(p_+ - p_+')\,\delta(p_- - p_-')\,(-1)^n \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\xi e^{-i\theta_k} + 1}{\xi + e^{-i\theta_k}} ,$$

$$\theta_k = \frac{k}{n}\pi \quad .$$

После окончания работы автор узнал о [14], где рассматривается отражение C и A. В [14] C и A заменяются частицами, взаимодействующими НП. Квантование сводится к решению уравнения Шредингера. НП вычислен в [14] неверно. Верный при $\phi_\pm \to 0$ коэффициент отражения, приведенный в [14], вопреки утверждению автора, не получается при решении приведенного там уравнения Шредингера.

Вычислим НП по величине действия s_f^{cl} на КТ, описывающей прохождение C и A (1). Он, очевидно, даст правильную S-матрицу (2) при $\phi_\pm \to 0$. Пусть $x_+(x_-)$ и $x_+'(x_-')$ координата $C(A)$ в моменты t и t'. При $t' \to \infty$, $t \to -\infty$, s_f^{cl} имеет вид при $\phi_\pm = \phi_\pm(x_+ - x_-, x_+' - x_+, x_-' - x_-, t', t) \to 0$,

$$s_f^{cl} - s_+^{cl} - s_-^{cl} = \frac{8\pi^2}{\gamma} + \frac{16}{\gamma}|\phi_- - \phi_+| \ln\frac{|\phi_- - \phi_+|}{2} - \frac{16}{\gamma}|\phi_- - \phi_+| +$$

$$+ O\left(\frac{1}{t' - t}\right) + O\left(|\phi_- - \phi_+|^2 \ln|\phi_- - \phi_+|\right). \qquad (6)$$

НП, восстановленный по первым двум слагаемым в (6), доминирующим при $\phi_\pm \to 0$, приводит к уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\gamma}{8m}\frac{d^2}{dR^2} - \frac{\gamma}{8m}\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\pi^2 m}{\gamma\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{mr}{2}\right)}\right]\psi, \quad R = x_+ + x_-, \quad r = x_+ - x_-, \qquad (7)$$

которое при $\gamma \to 0$, $\phi_\pm \to 0$ правильно описывает спектр двойных C ([3, 13]), (2) и (5). П.Винчиарелли вычисляет НП, используя зависимость $(p_- - p_+)_{\text{эфф}}$ от $(x_- - x_+)_{\text{эфф}}$ вдоль КТ, т. е. фактически по $\partial s_f^{cl}/\partial(x_- - x_+)$, в которой главное нерелятивистское слагаемое $8\pi^2/\gamma$ утеряно, что и приводит к неверному коэффициенту перед $1/\mathrm{ch}^2(mr/2)$. КТ задают вид НП только при $r \to \infty$; $\exp\{-m|r|\}$, предложенная в [15], и $1/\mathrm{ch}^2(mr/2)$ неразличимы. Мы выбираем (7), благодаря (5).

На отражение C и A указал автору Л.Д.Фаддеев. Автор благодарен Л.Д.Фаддееву и М.А.Семенову-Тян-Шанскому за полезные обсуждения.

Ленинградское отделение
математического института
им. В.А.Стеклова

Поступила в редакцию
21 декабря 1975 г.

Литература

[1] Л.Д.Фаддеев, Л.А.Тахтаджян. ТМФ, 21, 142, 1974.

[2] В.Е.Захаров, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ДАН СССР, **219**, 1334, 1974.

[3] В.Е.Корепин, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, **25**, 147, 1975; В.Е.Корепин, П.П.Кулиш, Л.Д.Фаддеев. Письма в ЖЭТФ, **21**, 302, 1975.

[4] R.Jackiw, G.Woo. Proprint MII 1975.

[5] В.Л.Покровский, И.М.Халатников. ЖЭТФ, **40**, 1713, 1961.

[6] В.Л.Покровский, С.К.Саввиных, Ф.Р.Улинич. ЖЭТФ, **34**, 1272, 1958.

[7] В.С.Попов, В.П.Кузнецов, А.М.Переломов. ЖЭТФ, **53**, 331, 1967.

[8] В.С.Попов. ЖЭТФ, **63**, 1586, 1972.

[9] В.П.Маслов. ТМФ, **2**, 30, 1970.

[10] D.Babbitt. J. Math. Phys., **4**, 36, 1963.

[11] J.Feldman. Trans. Amer. Math. Soc., **108**, 251, 1963.

[12] D.W.McLaughlin, J.Math. Phys., **13**, 1099, 1972.

[13] R.F.Dashen, B.Hasslacher, A.Neveu. Phys. Rev., **D11**, 3424, 1975.

[14] P.Vinciarelly. Preprint CERN NH 2079 , 1975.

[15] I.Ventura, G.C.Marques. Preprint , Cidade Universitaria Brasil, 1975.
