

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЕННЫХ ШНУРОВ

Н.М.Зуева, Л.С.Соловьев, А.И.Морозов

Показано существование нелинейной МГД-неустойчивости, приводящей к существенной перестройке внутренней структуры магнитного поля.

В настоящее время детально развита линейная теория устойчивости плазменных конфигураций. Однако еще со времен работ Ляпунова по устойчивости гравитирующих масс известно, что линейное приближение достаточно только в случаях, когда частота ω является комплексной величиной. Если же ω — вещественная (так называемый "нейтральный случай"), то линейного приближения недостаточно для решения вопроса об устойчивости при сколь угодно малом начальном возмущении [1]. Проблема устойчивости равновесных плазменных конфигураций при идеальной проводимости относится именно к этому "нейтральному случаю". Тем не менее в теории устойчивости плазменных конфигураций этот вопрос не обсуждался. Представляется естественным интерес к нелинейным стадиям эволюции возмущенного плазменного шнура (см., например, [2, 3]). В связи с этим авторами совместно с Герлах был проведен численный расчет [4 - 6] на ЭВМ эволюции прямых плазменных шнуров под действием начального возмущения скорости

$$v_{r_0} = \lambda r^{m-1} (1 - r^2) \cos m\theta, \quad v_{\phi_0} = -\lambda r^{m-1} \left(1 - \frac{m+2}{m} r^2\right) \sin m\theta, \quad (1)$$

удовлетворяющий условию $\text{div } \mathbf{v}_0 = 0$. Здесь $\theta = \phi - az$, $a = 2\pi/L$, $m = 2$, $v_{z_0} = 0$.

Рассчитывалась система МГД-уравнений идеальной плазмы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v} \mathbf{B}], \quad (2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + [\mathbf{j} \mathbf{B}],$$

где $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$, $p = \rho \gamma \exp s$, в предположении винтовой симметрии процесса (независимые переменные r , θ , t). Исходная равновесная конфигурация задавалась безразмерными параметрами

$$B_{z_0} = 1, \quad j_{z_0} = 2\mu_0 (1 - r^{2N}), \quad N = 1; 10. \quad (3)$$

Случай $N = 1$ соответствует параболическому распределению тока, а случай $N = 10$ — квазиоднородному. В процессе расчета выяснилось, что при определенных "резонансных" параметрах μ_0/a все рассмотренные конфигурации "рассыпались" спустя несколько единиц вре-

мечи (рис. 1, а, б), хотя амплитуды возмущения скорости (измеряемые в альфвеновских единицах) брались достаточно малыми ($\lambda = 10^{-1}; 10^{-2}$).

Согласно классической линейной теории устойчивости рассматриваемые конфигурации при данных возмущениях являются устойчивыми, поскольку приращение потенциальной энергии [7] $\delta W > 0$ (см. рис. 2).

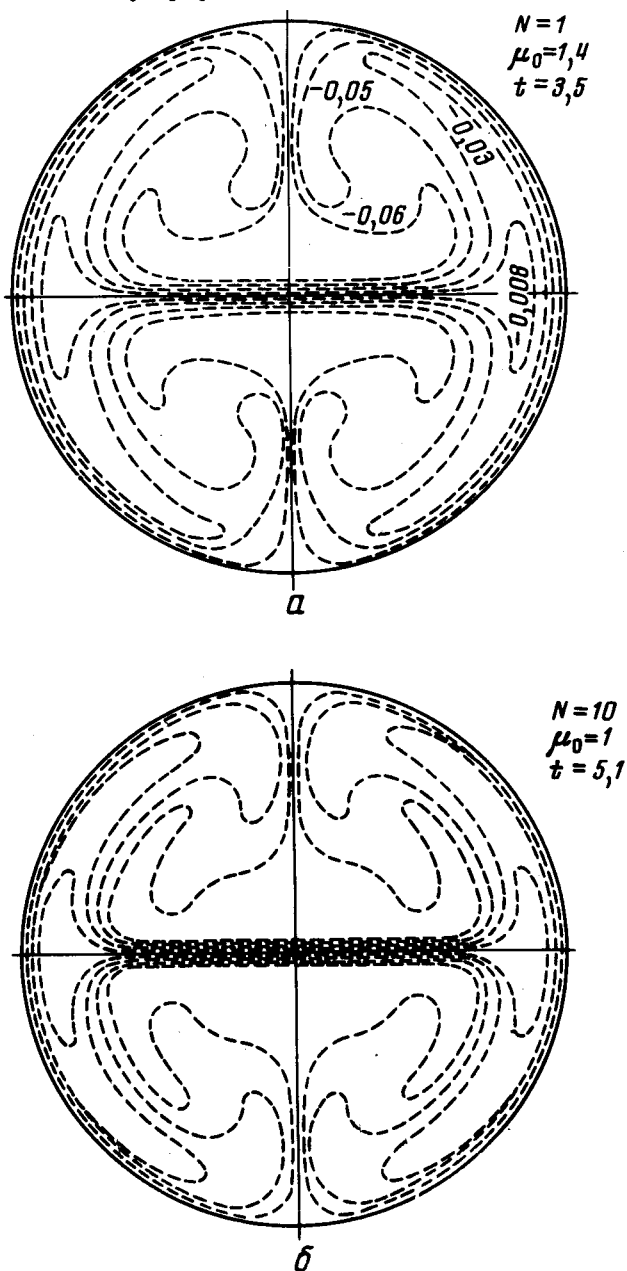


Рис. 1. Сечения магнитных поверхностей: а — $N = 1; \mu_0/a = 1,4; t = 3,5$; б — $N = 10; \mu_0/a = 1; t = 5,1$

Чтобы понять обнаруженные странные явления будем искать решение системы (1) не методом линеаризации, при котором отбрасываются нелинейные члены, а следуя Трубникову [8], методом разложения всех параметров в ряды по степеням времени t

$$a = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \dots$$

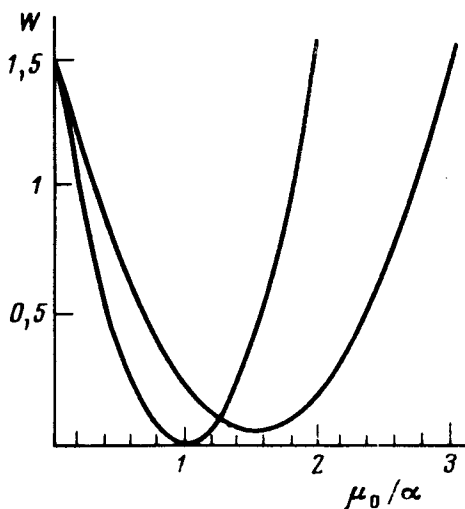


Рис. 2. Потенциальная энергия приближения $a - N = 1$; $b - N \gg 1$

При этом получается следующее выражение для изменения во времени кинетической энергии плазменной конфигурации

$$\begin{aligned}
 W_k &= \frac{1}{2} \int \rho_0 v_0^2 d\tau + \frac{t^2}{2} \int \rho_0 v_0 v_2 d\tau + \frac{t^4}{6} \int (\rho_0 v_2^2 + 0(v_0^4)) d\tau + \dots = \\
 &= W_{k_0} - t^2 \lambda^2 A_2 + t^4 \lambda^2 A_4 + 0(t^4 \lambda^4) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Здесь

$$\rho_0 v_2 = \nabla(v_0 \nabla p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} v_0) + [j_1 B_0] + [j_0 B_1], \quad B_1 = \operatorname{rot}[v_0 B_0].$$

Выражение для второго члена в (4) полностью совпадает с классическим функционалом $-\delta W$ потенциальной энергии линейной теории [7, 8] ($\xi = v_0 t$). Следовательно, в линейном приближении, если $A_2 > 0$, то конфигурация устойчива относительно данного начального возмущения, если же $A_2 < 0$, то неустойчива. Как видно из выражения (4) третий член $\sim \lambda^2 t^4$ всегда положителен и в тех случаях, когда A_2 мало ("резонансы") становится определяющим. Таким образом, мы приходим к выводу, что даже устойчивая в линейном приближении система ($A_2 > 0$) при сколь угодно малом возмущении ($\lambda \rightarrow 0$) теряет устойчивость при

$$t > t_0 = \sqrt{A_2 / 2A_4}.
 \tag{5}$$

Анализ выражения для t_0 показывает, что в случае равновесной конфигурации (3) с квазиоднородным током ($N \gg 1$) при начальном возмущении (1) с $m = 2$ в окрестности резонанса $\mu_0 = \alpha$: $t_0 \approx |\alpha - \mu_0| / 2\mu_0^2$. Разумеется, при достаточно больших временах существенную роль будут играть отброшенные члены разложения по t . Однако, как уже отмечалось выше, численный счет однозначно указывает на развитие неустойчивости, разрушающей начальную структуру шнура (рис. 1, а, б). Наглядной иллюстрацией проведенного рассмотрения является вычисленный на ЭВМ путем интегрирования системы (2) ход W_k со временем,

изображенный на рис. 3. Видно, что в соответствии с (4) величина W_k сначала медленно падает, поскольку $A_2 > 0$, а затем начинает быстро расти.

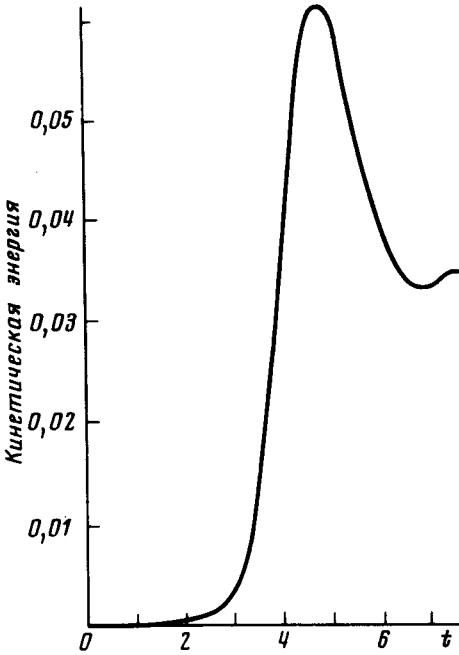


Рис. 3. Кинетическая энергия W_k для $N = 1$; $\mu_0/a = 1,4$; $\lambda = 0,01$

Представляет интерес отметить, что рассмотренная нелинейная неустойчивость развивается в основном за счет тепловой энергии плазмы. Действительно, при $\text{div } v_0 = 0$ (что является условием минимизации δW), выражение для W_T , вычисленное аналогично W_k , имеет вид

$$W_T = \int \frac{p_0 d\tau}{\gamma - 1} - \frac{t^4}{8} \int \{ \rho_0 v_2^2 - v_2 ([j_1 B_0] + [j_0 B_1]) \} d\tau. \quad (6)$$

Поскольку полная энергия сохраняется $W_k + W_T + W_B = \text{const}$, то согласно (4) и (6) в классическом линейном приближении на развитие неустойчивости расходуется только магнитная энергия W_B . Однако, в окрестности $\min \delta W$, если основной вклад в развитие неустойчивости дают члены $\sim t^4$ и можно пренебречь величиной B_1 , то получаем качественно другой результат. А именно, при этом

$$\delta W_T = - \frac{t^4}{8} \int \rho_0 v_2^2 d\tau = - \int p_1 \text{div } v_2 d\tau, \quad (7)$$

т. е. 3/4 вклада в δW_k дает тепловой энергии и 1/4 — магнитная энергия.

Таким образом, мы показали существование принципиально нелинейных неустойчивостей прямых плазменных шнуров, развивающихся при сколь угодно малых начальных возмущениях. Непосредственный перенос полученных результатов на тороидальный случай представля-

ется неправомочным в силу не учета ряда важных факторов, присущих тороидальным конфигурациям ($\min B$, центробежные эффекты, неоклассическая диффузия и т. п.).

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
2 февраля 1976 г.

Литература

- [1] М.А.Лянунов. Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, М., 1935.
 - [2] А.И.Морозов, Л.С.Соловьев. С типичной структуре тороидального магнитного поля. ЖЭТФ, 45, 4, 1963.
 - [3] Б.Б.Кадомцев. О.П.Погуде. Нелинейные винтовые возмущения плазмы в токамаках. ЖЭТФ, 65, 2, 1973.
 - [4] Н.И.Герлах, Н.М.Зуева, А.И.Морозов, Л.С.Соловьев. О развитии винтовой МГД-неустойчивости". Препринт №74 ИПМ АН СССР, 1975.
 - [5] Н.И.Герлах, Н.М.Зуева, Л.С.Соловьев. Винтовая МГД-неустойчивость идеальной плазмы". Препринт №96 ИПМ АН СССР, 1975.
 - [6] Н.М.Зуева, Л.С.Соловьев. Эволюция геометрии магнитного поля при винтовом течении плазмы. Препринт №95 ИПМ АН СССР, 1975.
 - [7] I.V.Bernstein et al. Proc. Roy. Soc., A244, 17, 1958.
 - [8] В.А.Трубников. Phys. Fluids, 5, 184, 1962.
-