Письма в ЖЭТФ, том 23, вып. 6, стр. 356 – 358 *20 марта 1976 г.*

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТИРРИНГА

А.В.Михайлов

Показано, что к модели Тирринга применим метод обратной задачи. Получена рекуррентная формула для последовательности интегралов движения.

Интерес к двумерным моделям теории поля значительно возрос после того, как первая нетривиальная модель – уравнение "Sine-Gordon" – была детально исследована методом обратной задачи [1]. В настоящей работе рассматривается модель Тирринга [2]

$$(-i\partial_\nu\gamma^\nu + m)\psi = \pm g\gamma^\nu\psi(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi) \tag{1}$$

где $\nu = 0,1.$, а

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \gamma^1 = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad \gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1,\qquad \bar{\psi} = \psi^+\gamma^0 \tag{2}$$

– теория спинорного поля с ненулевой массой.

Мы воспользуемся обобщением метода обратной задачи, предложенным Захаровым [3], который вкратце состоит в следующем. Рассматривается пара операторных пучков $X = \sum_s^t A_i\lambda^i$ и $T = \sum_n^m B_i\lambda^i$, где A_i и B_i – линейные операторы, а λ – спектральный параметр. Требование

$$[X, T] = 0 \tag{3}$$

эквивалентно равенству нулю выражений, стоящих при каждой степени λ, т. е. приводит к системе уравнений. Решение этой системы сводится к изучению прямой и обратной задачи для операторного пучка.

Для представления уравнения (1) в виде (3) можно воспользоваться следующими операторными пучками

$$X = 2i\partial_x \mp ig(\bar{\psi}\gamma_1\psi)\gamma^5 - i\lambda\epsilon + i\lambda^{-1}a - i\frac{m}{2}(\lambda^2 - \lambda^{-2})\gamma^5, \tag{4}$$

$$T = 2i\partial_t \mp ig(\bar{\psi}\gamma_0\psi)\gamma^5 - i\lambda\epsilon - i\lambda^{-1}a - i\frac{m}{2}(\lambda^2 + \lambda^{-2})\gamma^5, \tag{5}$$

где

$$\epsilon = \sqrt{2mg}\begin{pmatrix}0 & \psi_2^*\\ \pm\psi_2 & 0\end{pmatrix},\qquad a = \sqrt{2mg}\begin{pmatrix}0 & \psi_1^*\\ \pm\psi_1 & 0\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться в том, что при преобразованиях Лоренца пучки преобразуются по линейному представлению (в данном случае как компоненты ковариантного вектора), если вместе с преобразованием векторов $A^0 = A^{0\prime}\operatorname{ch}b + A^{1\prime}\operatorname{sh}b$, $A^1 = A^{1\prime}\operatorname{ch}b + A^{0\prime}\operatorname{sh}b$ и спиноров $\psi = e^{\frac{1}{2}b\sigma_3}\psi'$ преобразовывать также и спектральный параметр $\lambda = e^{-\frac{1}{2}b}\lambda'$. Можно показать, что при калибровочных преобразованиях пучки преобразуются по линейному представлению соответствующей группы $X = UX'U^{-1}$, $T = UT'U^{-1}$. Это является достаточным условием инвариантности системы (3) относительно группы Лоренца и группы калибровочных преобразований. Отметим, что указанное условие позволяет существенно сузить класс допустимых операторных пучков при поиске физически интересных систем (3) с заданными групповыми свойствами.

Все нелинейные уравнения, решаемые обычным методом обратной задачи, обладают важным свойством: существованием бесконечного набора интегралов движения. Аналогичное свойство можно установить и для данной схемы. Факт существования бесконечного набора интегралов следует из того, что диагональные элементы матрицы перехода, определенной аналогично работе [4], не зависят от времени. Разложение их в ряд по положительным степеням λ в окрестности нуля и по отрицательным степеням λ в окрестности бесконечности порождает счетную последовательность интегралов движения I_n и I_{-n}. Для них можно написать рекуррентную формулу. Определим для этого вспомогательную последовательность A_n $(n = -1, 0, 1, 2 \ldots)$ следующим образом

$$A_{-1} = A_0 = 0$$

$$i\sqrt{\frac{m}{2g}}\, A_{k+2} + \psi_1 \sum_{i+j=k+1} A_i A_j \mp \psi_1^* \delta_{k,-1} \pm \sqrt{\frac{2g}{m}}\, \bar{\psi}\gamma^1\psi A_k - \sqrt{\frac{2}{mg}}\, A_{kx} \pm$$

$$\pm \psi_2^* \delta_{k,1} - \psi_2 \sum_{i+j=k-1} A_i A_j - i\sqrt{\frac{m}{2g}}\, A_{k-2} = 0\,, \tag{7}$$

тогда интегралы движения I_n запишутся в виде

$$I_n = i\sqrt{\frac{mg}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_2 A_{n-1} - \psi_1 A_{n+1})\, dx. \tag{8}$$

Интегралы I_{-n}, соответствующие разложению по обратным степеням λ, связаны с I_n соотношением

$$I_{-n} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\bar{\psi}\gamma^\circ, \gamma^\circ\psi, -x)\, dx, \tag{9}$$

где F – плотность интеграла $I_n = \int F(\bar{\psi}, \psi, x)\, dx$. Из унимодулярности матрицы перехода следует вещественность всех интегралов движения. Приведем несколько первых членов последовательности

$$I_0 = I_{-0} = \mp \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}\gamma^\circ\psi\, dx\,, \tag{10а}$$

$$I_2 = \pm \frac{2g}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{i}{2}\, \psi_1^* \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_1 + \frac{m}{2}\, \bar{\psi}\psi \mp \frac{g}{4}\, (\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi) \right] dx\,, \tag{10б}$$

$$I_{-2} = \pm \frac{2g}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \left[+\frac{i}{2}\, \psi_2^* \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_2 + \frac{m}{2}\, \bar{\psi}\psi \mp \frac{g}{4}\, (\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi) \right] dx\,, \tag{10в}$$

$$I_4 = \mp \frac{g}{m^2} \int [\, m^2 \bar{\psi} \gamma^0 \psi - im \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial_x} \psi + 4 |\psi_{1x}|^2 \mp 2mg (\bar{\psi}\gamma^0 \psi)(\bar{\psi}\psi) \mp$$

$$\mp 4g (\bar{\psi}\gamma^0 \psi) \psi_1^* \partial_x \psi_1 + g^2 (\bar{\psi}\gamma^0 \psi)(\bar{\psi}\gamma_\nu \psi)(\bar{\psi}\gamma^\nu \psi)\,]\, dx \,. \quad (10г)$$

Все нечетные интегралы равны нулю.

Закону сохранения заряда соответствует интеграл I_0. Вектор энергии-импульса выражается через I_2

$$P_0 = \pm \frac{m}{2g} (I_2 + I_{-2}) \,, \quad (11а)$$

$$P_1 = \pm \frac{m}{2g} (I_2 - I_{-2}) \,. \quad (11б)$$

В заключение отметим, что несколько интегралов движения для уравнения (1) были найдены Арефьевой [5].

Детальное исследование уравнения (1) достаточно громоздко и будет опубликовано в другом месте.

Автор выражает благодарность В.Е.Захарову за возможность ознакомиться с работой [3] до ее опубликования, а также Е.А.Кузнецову и В.С.Львову за полезное обсуждение.

Институт автоматики
и электроники
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
3 февраля 1976 г.

Литература

[1] В.Е.Захаров, Л.А.Тахтаджан, Л.Д.Фаддеев.ДАН СССР, 219, 1334, 1974.

[2] А.С.Вайтман. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. М., изд. Наука, 1968.

[3] В.Е.Захаров. Доклад на Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения академика И.Г.Петровского. Москва 27 – 29 января, 1976 г.

[4] В.Е.Захаров, С.В.Манаков. Препринт ИЯФ 74-41, 1974.

[5] И.Я.Арефьева. Доклад на сессии ОЯФ АН СССР, ноябрь 1975 г. (ТМФ, 1976 г. в печати)