Письма в ЖЭТФ, том 23, вып. 11, стр. 653 – 656 *5 июня 1976 г.*

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ В КЛАССИЧЕСКОЙ И ДВУХЖИДКОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В.Л.Покровский, И.М.Халатников

Развит гамильтонов формализм для гидродинамики сверхтекучей жидкости. Как следствие этого формализма вытекает гамильтонов формализм для неизэнтропических течений классической жидкости, ранее неизвестный.

Уравнения двухжидкостной гидродинамики могут быть записаны в гамильтоновой форме, если в качестве гамильтониана H взять величину энергии жидкости в неподвижной системе координат:

$$H = \int\left[\frac{\rho v_s^2}{2} + p v_s + \epsilon(\rho, S, p)\right] dV , \tag{1}$$

где ρ – плотность, v_s – скорость сверхтекучей компоненты p – импульс единицы объема жидкости в системе, движущейся со скоростью v_s, $\epsilon(\rho, S, p)$ – энергия единицы объема жидкости в той же системе, определяемая термодинамическим тождеством:

$$d\epsilon = TdS + \mu d\rho + (v_n - v_s)\, dp . \tag{2}$$

Импульс единицы объема жидкости в неподвижной системе j равен:

$$j = \rho v_s + p = \rho_s v_s + \rho_n v_n . \tag{3}$$

Гамильтоновыми переменными являются три канонически сопряженных пары (ρ, α), (S, β) и переменные Клебша [1] (f, γ).

Кроме уже определенных ранее величин ρ и S мы вводим четыре новых величины α, β, γ и f физический смысл которых следующий: величина α определяет скорость сверхтекучей компоненты:

$$v_s = \nabla\alpha . \tag{4}$$

Величины β, γ и f определяют импульс относительного движения

$$p = S\,\nabla\beta + f\,\nabla\gamma . \tag{5}$$

Выражение (1) приобретает смысл гамильтониана после подстановки (4) и (5) в (1). Уравнения Гамильтона имеют обычный вид:

$$\dot{\rho} = \frac{\delta H}{\delta \alpha} = -\operatorname{div} j , \tag{6}$$

$$\dot{S} = \frac{\delta H}{\delta \beta} = -\operatorname{div}(S v_n) , \tag{7}$$

$$\dot{f} = \frac{\delta H}{\delta \gamma} = -\operatorname{div}(f v_n) , \tag{8}$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\delta H}{\delta \rho} = -\left(\mu + \frac{v_s^2}{2}\right) \tag{9}$$

$$\dot{\beta} = -\frac{\delta H}{\delta S} = -T - v_n \nabla\beta , \tag{10}$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\delta H}{\delta f} = -\mathrm{v}_n \nabla \gamma \cdot \tag{11}$$

Уравнения (6) и (7) суть известные уравнения непрерывности для плотности и энтропии. Уравнение (9) есть уравнение сверхтекучего движения, в чем легко убедиться, взяв градиент обеих частей равенства. Дифференцируя уравнение (5) по времени и используя уравнения (6), (7), (10), (11), получим известное уравнение относительного движения [2]:

$$\dot{\mathrm{p}} + \mathrm{p}\,\mathrm{div}\,\mathrm{v}_n + \nabla(\mathrm{p}\mathrm{v}_n) - [\mathrm{v}_n\,\mathrm{rot}\,\mathrm{p}] + S\nabla T = 0\,. \tag{12}$$

Комбинируя уравнения (9) и (12), получаем

$$\dot{j}_n + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{13}$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} p_k + v_{nk} p_i + p\delta_{ik}, \tag{14}$$

где давление p определяется следующим образом:

$$p = -\epsilon + TS + \mu\rho + (\mathrm{v}_n - \mathrm{v}_s)\mathrm{p}. \tag{15}$$

Таким образом, мы убеждаемся в правильности выбора канонически сопряженных переменных. Переменные β, f и γ необходимы для описания трех независимых компонент вектора **p**. Отметим, что те же переменные можно использовать для описания движения классической жидкости. При этом импульс единицы массы

$$\mathrm{j} = \rho\mathrm{v} = \rho\nabla a + S\nabla\beta + f\nabla\gamma\,, \tag{16}$$

а в качестве гамильтониана нужно брать

$$H = \int\left[\frac{\rho\mathrm{v}^2}{2} + \epsilon(\rho, S)\right] dV. \tag{17}$$

Гамильтоновы уравнения для классической жидкости имеют тот же вид, что уравнения (6) – (11), в которых следует только положить $\mathrm{v}_n = \mathrm{v}_s = \mathrm{v}$. При этом уравнения (6) и (7) переходят в обычные уравнения непрерывности и сохранения энтропии, а уравнение (13) – в уравнение Эйлера. Обычная формулировка Клебша [1] позволяет получать уравнения гидродинамики в гамильтоновой форме только для случая баротропных течений, когда ϵ зависит только от ρ. Наше представление импульса (13) содержит лишний член $S\nabla\beta$ по сравнению с обычным выражением Клебша, что позволяет описывать и небаротропные течения. Для описания вектора j в классической гидродинамике достаточно трех независимых величин, так что одна из введенных нами четырех, например, f, кажется лишней. В двускоростной гидродинамике эта функция является независимой от остальных. Поскольку в классической гидродинамике имеется 5 независимых величин (ρ, S и вектор $\mathbf{j}$), то из 6 гамильтоновых уравнений следует, что одна из величин, например, f, не является независимой.

Гамильтониан (1) может быть получен обычным образом из лагранжевой формулировки уравнений двухжидкостной гидродинамики, предложенной одним из авторов в работе [3].

Гамильтоновский формализм в двухжидкостной гидродинамике позволяет легко доказать следующую теорему. Пусть в некоторый начальный момент $t = t_0$ величина $\mathrm{rot}\, \mathbf{p}/S$ равнялась нулю во всем пространстве. Тогда она останется равной нулю и во все последующие моменты времени. Действительно, из (8) следует, что таким свойством обладает величина f. Отсюда и из уравнения (5) получим указанное выше утверждение. Таким образом, в двухжидкостной гидродинамике существует аналог теоремы о циркуляции, известной в гидродинамике идеальной жидкости.

Мы признательны В.Е.Захарову за полезную дискуссию.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 апреля 1976 г.

Литература

[1] Г.Ламб. Гидродинамика, ОНТИ, 1947; Б.И.Давыдов, ДАН СССР, 89, 165, 1949.

[2] И.М.Халатников. Теория сверхтекучести, М., изд. Наука, 1971.

[3] И.М.Халатников. ЖЭТФ, 23, 169, 1952.