Письма в ЖЭТФ, том 31, вып. 4, стр. 213 – 217 *20 февраля 1980 г.*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕПЕННЫХ СОЛИТОНОВ В ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

М.М.Богдан, А.С.Ковалев

Показана абсолютная неустойчивость степенных солитонов в некоторых одномерных нелинейных системах.

В последнее время при изучении нелинейных систем большое внимание уделяется солитонам. Недавно было показано [1 – 3], что ряд одномерных нелинейных уравнений обладают солитонными решениями, имеющими степенные асимптотики. Они получаются из обычных экспоненциальных солитонов при специальном выборе их параметров. Мы хотим обратить внимание на важность проблем устойчивости степенных солитонов. Ниже будет показана абсолютная неустойчивость таких решений в некоторых конкретных случаях.

1. Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\dot{\psi} + \psi'' - \psi + f\{|\psi|^2\}\psi = 0, \qquad (1)$$

к которому в первом приближении сводятся при решении асимптотическим методом многие нелинейные уравнения [4]. Интересуясь решениями вида $\psi = u(x)\exp(i\omega t)$ приходим к следующему уравнению для $u(x)$:

$$u'' - (1+\omega)\,u + f(u^2)u = 0. \qquad (2)$$

Обычно при изучении солитонных решений в разложении $f(z)$ ограничиваются лишь первым членом: $f(z) = az$. Тогда при $a > 0$ при всех $\omega > -1$ уравнение (2) имеет уединенное решение. При малых амплитудах колебаний, но аномально большом коэффициенте при втором члене разложения $f(z)$ в нем необходимо оставлять два члена. Тогда солитон может существовать даже при $a < 0$. Если второй член положителен, то

$$u'' - (1+\omega)\,u - |a|\,u^3 + \beta^2 u^5 = 0. \qquad (3)$$

При произвольном $\omega > -1$ солитонное решение имеет вид

$$u = \frac{\epsilon}{\sqrt{|a|}}\left\{\sqrt{1 + \frac{4}{3}\left(\frac{\beta\epsilon}{a}\right)^2}\,\mathrm{ch}\,\epsilon x - 1\right\}^{-1/2}, \qquad \epsilon = 2\sqrt{1+\omega}\,. \qquad (4)$$

При $\epsilon \to 0$ $(\omega \to -1)$ решение (4) переходит в степенной солитон

$$u = \sqrt{\frac{2}{|a|}}\left\{x^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\right\}^{-1/2}. \qquad (5)$$

Несложно доказать, что решения (4), (5) являются неустойчивыми в смысле экспоненциального роста малых добавок к ним. В работе [5] показано, что неустойчивость солитонов в нелинейном уравнении Шредингера связана со знаком производной $dI/d\omega$, где $I = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$.

Солитоны устойчивы при $dI/d\omega > 0$ и неустойчивы при $dI/d\omega < 0$. В нашем случае

$$I(\omega) = \sqrt{3}/\beta\left\{\frac{\pi}{2} + \arcsin\left[\left(1 + \left(\frac{\beta\epsilon}{a}\right)^2\right)^{-1/2}\right]\right\}, \qquad (6)$$

и легко проверить, что $dI/d\omega < 0$. Таким образом, солитоны (4), (5) нустойчивы. По-видимому, они распадаются на периодические волны

$\psi = \psi_0 e^{i\omega t - ikx}$, для которых выполняется критерий устойчивости Лайтхилла: $\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial \psi_0^2} \bigg/ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_{\psi_0 \to 0} > 0.$

2. Возможен другой подход к рассматриваемой проблеме. Как известно, при квантовании нелинейных систем мы приходим к задаче об одномерном газе взаимодействующих бозонов [6, 7]. Обыкновенным солитонам соответствует связанное многобозонное состояние в системе с парным притяжением между частицами. Случай трехчастичного отталкивания и парного притяжения был рассмотрен в [8]. Остановимся на противоположном случае парного отталкивания и трехчастичного притяжения. Такая система может быть описана гамильтонианом

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2Va\sum_{i<j}\delta(x_i - x_j) - 3Wa^2\sum_{i<j<s}\delta(x_i - x_j)\delta(x_i - x_s), \tag{7}$$

где m — масса частицы, $V > 0$, $W > 0$, a — радиус взаимодействия, N — число частиц. В приближении самосогласованного поля, когда все одночастичные волновые функции одинаковы, уравнение Хартри выглядит так:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \nu\phi - 2NV\phi^3 + \frac{3}{2}N^2W\phi^5 = 0, \tag{8}$$

где $\phi(x)$ — одночастичная нормированная хартриевская волновая функция ($\int\phi^2 dx = a$), а ν — одночастичная хартриевская энергия, связанная с полной энергией соотношением

$$E = N\nu - \frac{N^2V}{a}\int dx\cdot\phi^4 + \frac{N^3W}{a}\int dx\,\phi^6. \tag{9}$$

Видно, что при замене $\omega = -1 - 2m\nu/\hbar^2$, $|a| = 4mNV/\hbar^2$, $\beta^2 = 3mN^2W/\hbar^2$ уравнение (8) совпадает с (3) и имеет локализованные решения типа (4), (5). Исследование их устойчивости сводится к сравнению энергии, приходящейся на одну частицу в таком связанном состоянии с энергией свободного бозона. Подставляя решения (4), (5) в выражение (9) и пользуясь условием нормировки, получаем

$$E/N = \left(V^2/2W\right)\left\{1 + \operatorname{tg}\left(\sqrt{mW}\frac{aN}{\hbar}\right) \bigg/ \left(\sqrt{mW}\frac{aN}{\hbar}\right)\right\}, \tag{10}$$

где (в силу (6)) само N может меняться лишь в ограниченных пределах $N^*/2 < N < N^*$, $N^* = \pi\hbar/a\sqrt{mW}$. Степенно́му солитону соответствует $N = N^*$ и минимальная энергия на одну частицу $(E/N)_{min} = V^2/2W$. Так как она положительна и попадает в сплошной спектр одночастичных возбуждений, то рассмотренные здесь квантовые экспоненциальные и степенны́е солито́ны являются абсолютно неустойчивыми.

3. В заключение исследуем неоднократно рассматривавшееся [9] нелинейное волновое уравнение для комплексной амплитуды, сразу выбрав в нем нелинейный потенциал в виде , обсуждавшемся в пункте 1

$$\ddot{\Psi} - \Psi'' + \Psi + a|\Psi|^2\Psi - \beta^2|\Psi|^4\Psi = 0. \tag{11}$$

Ограничиваясь монохроматическими решениями $\Psi = v(x)e^{i\Omega t}$ получаем для $v(x)$ при замене $\omega \to -\Omega^2$ уравнение (3) и решения (4), (5). Уравнение (11) описывает динамику лагранжевой системы и с помощью соответствующего лагранжиана [9] мы можем легко найти энергию и адиабатический инвариант. Для наших решений они имеют вид

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(v')^2 + (1+\Omega^2)\, v^2 + \frac{a}{2} v^4 - \frac{\beta^2}{3} v^6 \right], \tag{12}$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^T dt \left\{ \dot{\Psi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} + \dot{\Psi}^* \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^*} \right\} = 2|\Omega| \int_{-\infty}^{\infty} dx\, v^2, \tag{13}$$

где L — плотность функции Лагранжа [9]. В отличие от классического и квантового исследования солитонов в предыдущих пунктах, здесь мы будем опираться на соображения квазиклассики. Как известно, в квазиклассическом приближении условия квантования сводятся к требовани- $J = \hbar N$, где N — число квазичастиц. Трактуя солитон как связанное состояние большого числа квазичастиц, вычислим энергию, приходящуюся в нем на одну частицу. С помощью (6) из (12), (13) находим

$$N = \frac{2|\Omega|}{\hbar} \frac{\sqrt{3}}{\beta} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left[1/\sqrt{1 + \frac{16}{3}(\beta/a^2)(1-\Omega^2)} \right] \right\}, \tag{14}$$

$$E/N = \frac{\hbar}{2|\Omega|}(1 + \Omega^2 + 3a^2/16\beta^2) + \frac{3a}{4\beta^2} \frac{\sqrt{1-\Omega^2}}{N} \tag{15}$$

N меняется от 0 до $N_0 = 2\sqrt{3}\pi/\hbar\beta$, которому соответствует степенной солитон с минимальной энергией на одну частицу $(E/N)_{min} = \hbar \left\{ 1 + \frac{3}{32}\left(\frac{a}{\beta}\right)^2 \right\}$.

Так как $(E/N)_{min}$ больше энергии свободной частицы $E_0 = \hbar$, то связанное состояние неустойчиво относительно распада на свободные частицы. (Заметим, что из (14) следует $dN/d|\Omega| > 0$ — при этом, как показано в [9], решение является модуляционно неустойчивым).

Полученные нами результаты для конкретных динамических систем указывают на особую необходимость исследования устойчивости солитонов в системах, допускающих степенные солитоны.

В заключение выражаем признательность А.М.Косевичу за внимание и интерес к работе.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
25 декабря 1979 г.

Литература

[1] D.J. Kaup, A.C.Newell. J.Math. Phys., **19**, 798, 1978.

[2] В.М.Елеонский, Н.Н.Кирова, Н.Е.Кулагин. Письма в ЖЭТФ, **29**, 601, 1979.

[3] А.М.Косевич, И.В.Манжос. Тезисы Всесоюзной конференции по физике магнитных явлений, Харьков, 1979 г. стр. 70.

[4] T.Taniuti, N.Yajima. J. Math. Phys., **10**, 1369, 1969.

[5] Н.Г.Вахитов, А.А.Колоколов. Изв. высш. уч. зав., сер. "Радиофизика", **16**, 1020, 1973.

[6] М.М.Богдан, А.М.Косевич. ФНТ, **2**, 794, 1976.

[7] Б.А.Иванов, А.М.Косевич. ЖЭТФ, **72**, 2000, 1977.

[8] А.С.Ковалев, А.М.Косевич. ФНТ, **2**, 2913, 1976.

[9] В.Г.Маханьков. Препринт ОИЯИ, Р-2-10362, Дубна, 1977.