Письма в ЖЭТФ, том 76, вып. 1, с. 3 – 10 © 2002 г. 10 июля

Пример аморфной решетки, на которой нет фермионного удвоения

С. Н. Вергелес[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Abdus Salam international centre for theoretical physics, Trieste, Italy

Поступила в редакцию 21 апреля 2002 г.

После переработки 6 июня 2002 г.

Построен пример двумерной аморфной решетки, на которой нет фермионного удвоения. Такой решеткой является двумерный симплициальный комплекс с границей и топологией диска, каждый внутренний 0-симплекс которого принадлежит границам *нечетного* числа 1-симплексов. Общее число симплексов комплекса стремится к бесконечности.

PACS: 04.60.–m, 98.80.Hw

1. В недавней работе [1] была предложена теория гравитации на решетке (симплициальном комплексе), которая включала дираковское поле. Дираковские степени свободы определялись на 0-симплексах, а степени свободы гравитационного поля – на 1-симплексах. При наивном переходе к континуальному пределу действие теории переходило в обычное действие Гильберта с евклидовой сигнатурой, включающее дираковское поле, минимально связанное с гравитацией.

Поскольку симплициальный комплекс общего вида относится к аморфным решеткам (то есть решеткам, для которых невозможно ввести понятие зоны Бриллюена), то в связи с рассматриваемой моделью дискретной теории гравитации вновь встала старая проблема удвоения фермионных состояний [2 – 6]. В работах [5] было доказано, что эта проблема решается в пользу удвоения фермионных состояний в том случае, когда решетка периодическая и существует импульсное представление и зона Бриллюэна. Рядом авторов высказывалась также гипотеза, что явление удвоения фермионных состояний (или вильсоновского удвоения) имеет место также и на аморфных решетках.

Целью настоящего письма является предъявление примера аморфной двумерной решетки, на которой отсутствует явление вильсоновского удвоения. Поскольку такие решетки возникают в связи с изучением дискретной теории гравитации, то изложение целесообразно начать с определения фермионной части действия в такой теории.

2. Подробное описание варианта теории дискретной гравитации, который здесь используется, содержится в [1]. Здесь мы ограничимся лишь необходимыми обозначениями, относящимися к двумерному случаю. Определение и некоторые свойства симплициальных комплексов описаны в [1], а систематическое изложение их теории можно найти в [7].

Пусть $\mathfrak{K}$ – двумерный симплициальный комплекс. Далее считаются синонимами понятия в следующих парах: 0-симплекс и вершина, 1-симплекс и ребро, 2-симплекс и треугольник. Будем предполагать, что геометрическая реализация комплекса $\mathfrak{K}$ является двумерной поверхностью с топологией диска и границей $\partial\,\mathfrak{K}$, причем $\partial\,\mathfrak{K}$ – одномерный симплициальный комплекс, имеющий топологию окружности. Обозначим через α_q, $q = 0, 1, 2,$ – число q-симплексов комплекса $\mathfrak{K}$. Для определенности будем считать, что двумерные матрицы Дирака γ^a, $a, b = 1, 2$ равны $\gamma^1 = \sigma^1$, $\gamma^2 = \sigma^2$, где σ^α, $\alpha = 1, 2, 3$ – матрицы Паули. В каждой вершине a_i комплекса $\mathfrak{K}$ определены дираковские спиноры ψ_i и $\overline{\psi}_i$, являющиеся двумерными матрицами–столбцами и матрицами–строками, соответственно. Везде индексы $i, j, k, \ldots$ нумеруют вершины комплекса. Поставим в соответствие каждому ориентированному ребру $a_i a_j$ элемент группы (абелевой в двумерном случае) Spin(2), который обозначим как $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}^{-1}$. Элемент группы голономии Ω_{ij} осуществляет параллельный перенос спинора ψ_j из вершины a_j в вершину a_i. Пусть V – линейное пространство с базисом γ^a. Каждому ориентированному ребру $a_i a_j$ поставлен в соответствие элемент $e^a_{ij}\,\gamma^a \equiv \hat{e}_{ij} \in V$, причем

$$\hat{e}_{ij} = -\Omega_{ij}\hat{e}_{ji}\Omega_{ji}. \qquad (1)$$

Индексом A будем нумеровать треугольники комплекса $\mathfrak{K}$. Сложные индексы (Ai), (Aij) и т.д. отмечают тот факт, что вершины a_i и a_j принадлежат треугольнику с индексом A.

[1)] e-mail:vergeles@itp.ac.ru

Будем считать, что комплекс $\mathfrak{K}$ имеет топологию диска. Такой комплекс допускает введение ориентации. Зададим ориентацию комплекса путем определения ориентации каждого треугольника. При этом, если два треугольника имеют общее ребро, то две ориентации ребра, задаваемые ориентациями этих двух треугольников, противоположны. Пусть a_{Ai}, a_{Aj} и a_{Ak} – вершины треугольника с индексом A. Тогда по определению $\varepsilon_{Aijk} = \pm 1$ в зависимости от того, задает ли порядок вершин $a_i a_j a_k$ положительную или отрицательную ориентацию этого треугольника.

Теперь мы можем выписать фермионную часть действия:

$$I_\psi = \frac{1}{6} \sum_A \sum_{i,j,k} \varepsilon_{Aijk}\, \varepsilon_{ab}\, \Theta^a_{Aij}\, e^b_{Aik},$$

$$\Theta^a_{Aij} = \frac{i}{2} \left(\overline{\psi}_{Ai}\, \gamma^a\, \Omega_{Aij}\, \psi_{Aj} - \overline{\psi}_{Aj}\, \Omega_{Aji}\, \gamma^a\, \psi_{Ai} \right). \quad (2)$$

Динамическими переменными являются величины Ω_{ij}, e_{ij}, описывающие гравитационные степени свободы, и поля ψ_i, $\overline{\psi}_i$, являющиеся материальными полями.

Действие (2) представляет интерес для изучения на предмет фермионного удвоения (или вильсоновского удвоения), поскольку его фермионная часть обладает следующими свойствами:

1) действие (2) локально;

2) в наивном континуальном пределе действие (2) переходит в гравитационное действие в форме Палатини плюс действие для дираковских полей, минимально связанных с гравитационным полем;

3) фермионная часть действия (2) является фазово-инвариантной, а также γ^5-инвариантной, то есть инвариантной относительно следующих преобразований: а) $\psi \to \exp(i\alpha)\psi$, $\overline{\psi} \to \overline{\psi}\exp(-i\alpha)$ и б) $\psi \to \exp(i\beta\gamma^5)\psi$, $\overline{\psi} \to \overline{\psi}\exp(i\beta\gamma^5)$.

Здесь α, β – вещественные непрерывные глобальные параметры, $\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2$. Так как фермионная мера на решетке также инвариантна относительно этих преобразований (даже и в локальном варианте), то в рассматриваемой теории сохраняется не только векторный ток, но и аксиально-векторный. (Точнее – сохраняется суммарный аксиально-векторный ток, состоящий из нескольких слагаемых в случае наличия фермионного удвоения.)

Хорошо известно [2–4, 6], что на гиперкубической решетке для любого фермионного действия, обладающего свойствами 1) – 3), имеет место явление вильсоновского удвоения. Кроме того, известно [5], что на периодических решетках, на которых фермионное действие имеет вид

$$I = \sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \overline{\psi}_{\mathbf{x}}\, \hat{H}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \psi_{\mathbf{y}} \quad (3)$$

($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ – радиус-векторы узлов решетки) и обладает перечисленными тремя свойствами, вильсоновское удвоение также имеет место. Однако ответа на вопрос: на всякой ли решетке фермионное действие со свойствами 1) – 3) приводит к вильсоновскому удвоению? – до сих пор не было. В настоящей работе приводятся примеры решеток (симплициальных комплексов), на которых для действия (2) отсутствует вильсоновское удвоение.

Подчеркнем, что на комплексах общего вида действие (2) не приводится к действию вида (3).

Проблема дискретной квантовой гравитации заключается в вычислении конечнократного интеграла по динамическим переменным с весом $\exp I$. Для решения интересующей нас задачи вильсоновского удвоения следует предположить, что Вселенная раздулась настолько, что флуктуациями гравитационного поля можно пренебречь, а флуктуации фермионного поля учесть путем нахождения собственных мод дискретного оператора Дирака в (2), выживающих в континуальном пределе. Чтобы решить поставленную задачу, ситуацию следует идеализировать в указанном направлении. Поэтому далее мы полагаем:

$$\Omega_{ij} = 1, \quad \left(e^a_{ij} + e^a_{jk} + \ldots + e^a_{li} \right) = 0. \quad (4)$$

Здесь сумма в круглых скобках берется по любому замкнутому пути, состоящему из 1-симплексов. Уравнения (4) означают, что кривизна и кручение равны нулю. Таким образом, геометрическая реализация комплекса $\mathfrak{K}$ находится в двумерной евклидовой плоскости, причем e^a_{ij} есть компоненты вектора в некоем ортогональном базисе в этой плоскости, начало и конец которого находятся в вершинах a_i и a_j, соответственно. Заметим, что при выполнении (4) имеем $\Theta^a_{ij} = -\Theta^a_{ji}$. Далее будем называть две вершины соседними, если они образуют границу одного ребра.

Выпишем уравнение для собственных мод дискретного оператора Дирака. Зафиксируем две соседние вершины a_i и a_j и выделим вклад в действие (2), пропорциональный Θ^a_{ij}. На рис.1 изображена часть комплекса, содержащая 1-симплекс $a_i a_j$, индексы i, j, k, l нумеруют вершины, индекс A, нумерующий треугольники, принимает здесь два значения: 1 и 2. Везде $s^a_{ij} = \varepsilon_{ab}\, e^b_{ij}$, то есть вектор s^a_{ij} получа-

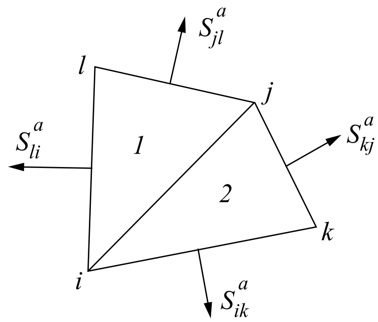

Рис.1

ется при помощи поворота вектора e^a_{ij} на угол $\pi/2$ по часовой стрелке. Искомый вклад в действие равен

$$\Delta I_{\psi\, ij} = \frac{1}{3}\Theta^a_{ij}\, S^a_{ij}, \quad S^a_{ij} = s^a_{kj} + s^a_{jl}.$$

Вектор S^a_{ij} можно назвать зонтиком вершины a_i со стороны соседней вершины a_j. По двум заданным соседним вершинам a_i и a_j зонтик S^a_{ij} определяется однозначно, причем из рис.1 и соотношений (4) видно, что $S^a_{ij} = -S^a_{ji}$. Выделим из комплекса подкомплекс $\mathfrak{v}_i$, состоящий из всех 2-симплексов, содержащих вершину a_i, и назовем этот подкомплекс окрестностью вершины a_i. Занумеруем вершины на границе $\partial\,\mathfrak{v}_i$ таким образом, что при непрерывном обходе границы $\partial\,\mathfrak{v}_i$ против часовой стрелки вершина a_{j+1} следует за вершиной a_j, и будем считать, что индекс j определен по $(mod\ n)$, где n – число вершин на $\partial\,\mathfrak{v}_i$. Тот факт, что индекс j нумерует вершины на $\partial\,\mathfrak{v}_i$ отмечаем, обозначением $j(i)$. Теперь легко выделить из действия (2) вклад, пропорциональный спинору $\overline{\psi}_i$:

$$\Delta I_{\overline{\psi}_i} = \frac{1}{3}\sum_{j(i)} \Theta^a_{ij}\, S^a_{ij}. \qquad (5)$$

При помощи (2), (4) и (5) получаем уравнение для собственных мод дискретного оператора Дирака во внутренних вершинах a_i:

$$\frac{\delta\,\Delta I_{\overline{\psi}_i}}{\delta\overline{\psi}_i} = \frac{i}{6}\sum_{j(i)} \hat{S}_{ij}\,\psi_j = \epsilon\left(\frac{1}{3}S_i\right)\psi_i. \qquad (6)$$

Здесь S_i – площадь окрестности $\mathfrak{v}_i$. Вследствие второго равенства в (4) имеем тождество

$$\sum_{j(i)} \hat{S}_{ij} \equiv 0. \qquad (7)$$

Действительно, каждый вектор $s^a_{j(i),j(i)+1}$ содержится в двух и только двух зонтиках в последней сумме. Из (7) следует, что уравнение (6) имеет разностный характер, то есть его левая часть зависит лишь от разностей $(\psi_{j(i)} - \psi_{k(i)})$.

Система уравнений для собственных мод записывается изящнее в комплексных обозначениях. Пусть x^a_j – декартовы координаты вершины a_j, $z_j = x^1_j + i\,x^2_j$ – ее комплексная координата. Верхнюю и нижнюю компоненты дираковского спинора ψ обозначим через φ и χ, соответственно. Тогда уравнение (6) принимает вид

$$-\frac{1}{2}\sum_{j(i)}\left(\overline{z}_{j+1} - \overline{z}_{j-1}\right)\chi_j = \epsilon\, S_i\,\varphi_i, \qquad (6a)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j(i)}\left(z_{j+1} - z_{j-1}\right)\varphi_j = \epsilon\, S_i\,\chi_i, \qquad (6b)$$

причем для нулевой моды ($\epsilon = 0$) имеем

$$\sum_{j(i)}(z_{j+1} - z_{j-1})\,\varphi_j = 0 \longleftrightarrow \sum_{j(i)} z_j\,(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) = 0. \qquad (8)$$

Далее используется обозначение для разностных переменных $\psi_{i,j} \equiv \psi_i - \psi_j$.

3. Нас интересуют все нулевые моды дискретного оператора Дирака с нулевыми граничными условиями для разностных переменных $\varphi_{k,k'}$. Одно такое решение является очевидным: $\varphi_i = \mathrm{const}$. Назовем это решение тривиальной нулевой модой.

Чтобы несколько прояснить ситуацию с нулевыми модами, рассмотрим конкретный пример.

Предположим, что $\partial\,\mathfrak{v}_i$ имеет четное число вершин. В этом случае вершина a_i называется четной. Тогда множество индексов $j(i)$ можно разбить на две равные по численности группы. Индексы из одной группы будем отмечать одним, а из другой – двумя штрихами, причем при непрерывном движении вдоль $\partial\,\mathfrak{v}_i$ вершины со штрихованными и дважды штрихованными индексами чередуются. В рассматриваемом случае уравнение (8) переписывается в следующем виде:

$$\left[\sum_{j'(i)} z_{j'}\,(\varphi_{j'+1} - \varphi_{j'-1})\right] + \left[\sum_{j''(i)} z_{j''}\,(\varphi_{j''+1} - \varphi_{j''-1})\right] = 0. \qquad (9)$$

Предположим теперь, что все внутренние вершины комплекса имеют четное число соседних вершин. Кроме того, пусть все множество внутренних вершин разбивается на конечное число подмножеств (в нашем случае – три: $\{a_{i'}\}$, $\{a_{i''}\}$, $\{a_{i'''}\}$) таких, что в систему уравнений для нулевой моды (8) входят лишь разности $(\psi_{j'_1} - \psi_{j'_2})$, $(\psi_{j''_1} - \psi_{j''_2})$, $(\psi_{j'''_1} - \psi_{j'''_2})$. Важно, что при этом координаты вершин находятся в общем положении. Поля $\psi_{j'}$, $\psi_{j''}$, $\psi_{j'''}$ будем называть ветвями нулевой и близких к ней мягких мод. Тогда заведомо имеет место явление вильсоновского удвоения (влиянием границы при $\alpha_0 \longrightarrow \infty$

можно пренебречь). Именно такой пример изображен на рис.2, где вершины из трех таких подмножеств вершин отмечены индексами 0, $\pm$. Нетриви-

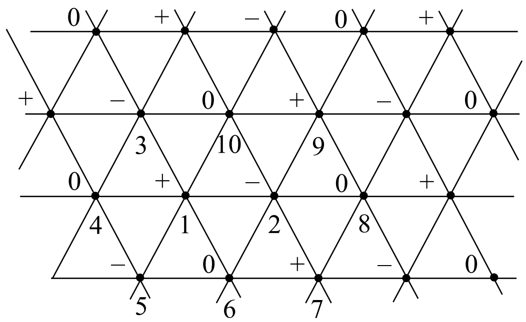

Рис.2

альная нулевая мода может быть взята, например, в виде $\varphi^0 = c \neq 0$, $\varphi^{\pm} = [\exp(\pm 2\pi i/3)]\, c$. Здесь φ^0, $\varphi^{\pm}$ – значения поля φ в вершинах, помеченных на рис.2 индексами 0, $\pm$, соответственно. Указанная нетривиальная мода ортогональна тривиальной (в естественной на правильной решетке мере $\sum_i \overline{\psi}_i \psi_i$) и потому независима. В этом примере мы имеем 3 ветви нетривиальной нулевой моды[2)].

Зададимся вопросом: существует ли такая решетка, на которой отсутствуют нетривиальные нулевые моды? Для ответа на этот вопрос необходимо изучить некоторые свойства системы уравнений (8), что требует дополнительных построений.

Чтобы имело место вильсоновское удвоение, нулевому набору значений переменных $\psi_{k,k-2}$ на границе $\partial\,\mathfrak{K}$ должны соответствовать *разные* решения системы уравнений (8). Иными словами, при нулевых значениях на $\partial\,\mathfrak{K}$ переменных $\psi_{k,k-2}$ должны существовать ненулевые решения системы уравнений (8) для некоторых переменных $\varphi_{i,j}$. Далее мы доказываем, что на так называемых нечетных комплексах при нулевых значениях на $\partial\,\mathfrak{K}$ переменных $\psi_{k,k'}$ все разностные внутренние переменные $\psi_{j(i),j(i)-2}$ обращаются в нуль вследствие системы уравнений (8).

Равенство нулю внутренних переменных $\psi_{j(i),j(i)-2}$ не всегда означает, что вильсоновское удвоение отсутствует. Действительно, в случае решетки, изображенной на рис.2, мы имеем: $\psi_{j'_1} = \psi_{j'_2} = \ldots,\ \psi_{j''_1} = \psi_{j''_2} = \ldots,\ \psi_{j'''_1} = \psi_{j'''_2} = \ldots$, но $\psi_{j'} \neq \psi_{j''} \neq \psi_{j'''}$.

[2)] В связи с рассматриваемой задачей укажем на обзор [8], в котором изучается на правильных треугольных решетках разностный оператор Лапласа, факторизующийся на разностные операторы первого порядка. Последние сравнивают значения переменных в соседних вершинах и этим качественно отличаются от оператора в уравнении (8).

Теперь рассмотрим симплициальный комплекс, по своим свойствам в определенном смысле противоположный комплексу, изображенному на рис.2. Это – комплекс, у которого граница каждой окрестности $\partial\,\mathfrak{v}_i$ имеет *нечетное* число вершин. Назовем эти комплексы нечетными.

Опишем индуктивную процедуру построения нечетных комплексов. На первом этапе можно взять любой комплекс, состоящий из нечетного числа треугольников с одной общей вершиной, которая является единственной внутренней вершиной. Предположим, что уже построен нечетный комплекс с $(M-1)$ внутренними вершинами. Возьмем любую вершину на его границе, которую обозначим a_M, и сделаем ее внутренней, добавляя к комплексу новые элементы.

На рис.3 сплошными линиями изображена старая часть комплекса с $(M-1)$ внутренними вершинами,

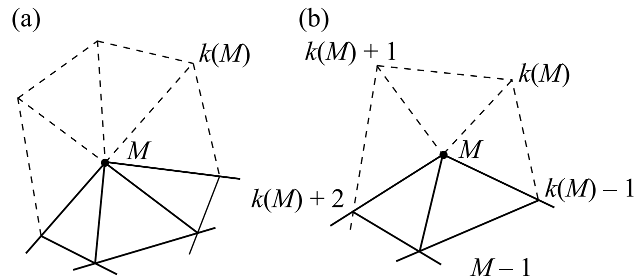

Рис.3

а штриховыми – та часть нового комплекса, которая добавляется к старому. На рис.3a (3b) сначала граничная вершина a_M принадлежала границам четного (нечетного) числа 1-симплексов. Поэтому при дополнительном построении в случае рис.3a (3b) добавляется нечетное (четное) число новых вершин и необходимое число 1-симплексов. Если в случае рис. 3b внешний граничный угол в вершине a_M острый, то достройка комплекса может состоять в добавлении единственного 1-симплекса с граничными вершинами $a_{k(M)-1}$ и $a_{k(M)+2}$; в результате число граничных вершин сокращается на одну.

Далее в этой заметке мы рассматриваем лишь комплексы, которые индуктивно строятся согласно изложенной схеме. При этом свойство нечетности не является обязательным.

Будем называть правильной внутренней переменной разностную переменную $\varphi_{k,i}$, если $a_k \in \partial\,\mathfrak{K}$, $a_i \notin \partial\,\mathfrak{K}$. Набор правильных внутренних переменных $\{\varphi_{k_i,i}\}_M$, $i = 1, \ldots, M$ (где M – число внутренних вершин), является независимым правильным набором внутренних переменных, если все внутренние вершины a_i попарно различны. Прилагательное “правильный" далее будет опускаться, поскольку это не будет вести к недоразумению. В качестве остальных $(L-1)$ независимых переменных возьмем независимые разностные переменные $\{\varphi_{k_\alpha,k'_\alpha}\}$, a_{k_α}, $a_{k'_\alpha} \in \partial\mathfrak{K}$. Здесь L – число вершин на $\partial\mathfrak{K}$.

Рассмотрим систему M уравнений (8) для комплекса с M внутренними и L граничными вершинами в $(M+L-1)$ независимых переменных $\{\varphi_{k_i,i}\}_M$ и $\{\varphi_{k_\alpha,k'_\alpha}\}$:

$$\sum_{j=1}^{M} X_{i,j}\varphi_{k_j,j} + \sum_{\alpha=1}^{L-1} Y_{i,\alpha}\varphi_{k_\alpha,k'_\alpha} = 0, \quad i = 1, \ldots, M. \tag{10}$$

Здесь коэффициенты $X_{i,j}$ и $Y_{i,\alpha}$ линейно выражаются через переменные z_i.

Утверждение 1. *$M \times M$ матрица $\| X_{i,j} \|$ невырождена, если M – четное число.*

Доказательство. Рассмотрим комплекс с $M = 2$. Например, пусть это будет подкомплекс комплекса, изображенного на рис.4, состоящий из треугольников

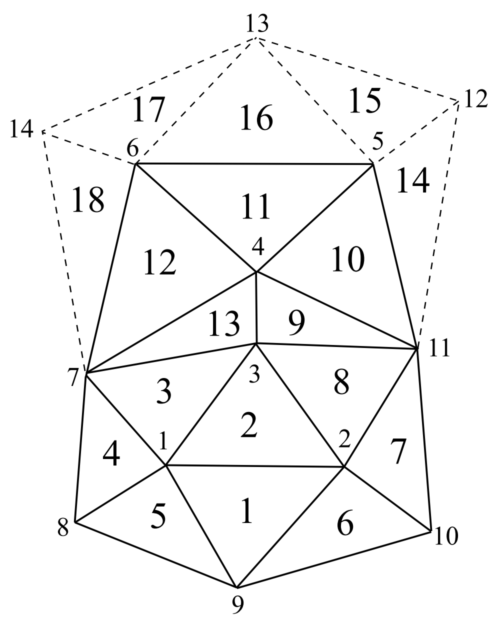

Рис.4

с номерами от 1 до 8. В качестве внутренних переменных возьмем разности $\{\varphi_{10,1}, \varphi_{7,2}\}$, а граничных – разности $\{\varphi_{8,3}, \varphi_{9,7}, \varphi_{10,8}, \varphi_{11,9}, \varphi_{8,7}\}$. Тогда в системе двух уравнений (10) в вершинах a_1 и a_2 матрица (мы пользуемся обозначением $z_{i,j} = z_i - z_j$)

$$\| X_{i,j} \| = \begin{pmatrix} 0 & -z_{9,3} \\ z_{9,3} & 0 \end{pmatrix},$$

$\det X_{i,j} = z_{9,3}^2 \neq 0$.

Теперь рассмотрим комплекс с $M = 4$, являющийся подкомплексом комплекса на рис. 4, состоящий из треугольников с номерами от 1 до 13. Внутренние и граничные разностные переменные соответственно выберем следующими: $\{\varphi_{10,1}, \varphi_{7,2}, \varphi_{8,3}, \varphi_{7,4}\}$ и $\{\varphi_{8,6}, \varphi_{9,7}, \varphi_{10,8}, \varphi_{11,9}, \varphi_{10,5}, \varphi_{11,6}\}$. В этом случае в системе четырех уравнений (10) в вершинах a_1, a_2, a_3, a_4 матрица

$$\| X_{i,j} \| = \begin{pmatrix} 0 & -z_{9,3} & z_{7,2} & 0 \\ z_{9,3} & 0 & -z_{11,1} & 0 \\ -z_{7,2} & z_{11,1} & 0 & -z_{11,7} \\ 0 & 0 & z_{11,7} & 0 \end{pmatrix},$$

и $\det X_{i,j} = z_{9,3}^2 z_{11,7}^2 \neq 0$. Предположим, что утверждение доказано для четного числа $(M-2)$ и установим его справедливость для комплексов с M внутренними вершинами.

Рассмотрим такой случай достройки комплекса, какой изображен на рис.4: вершины a_5 и a_6 последовательно делаются внутренними за счет добавления к комплексу треугольников с номерами 14, 15, 16 и затем 17, 18. Можно считать, что вершины a_5 и a_6 отождествлены с вершинами a_{M-1} и a_M, соответственно. Пусть в новой системе M уравнений (10) номера уравнений соответствуют номерам внутренних вершин. Старые граничные переменные вида $\varphi_{k_1,M-1}$ и $\varphi_{k_2,M}$, ставшие в достроенном комплексе внутренними, выразим через новые внутренние переменные $\varphi_{k(M-1),M-1}$, $\varphi_{k(M),M}$ и новые граничные переменные. Таким образом, при переходе от комплекса с $(M-2)$ внутренними вершинами к комплексу с M внутренними вершинами в новой системе уравнений (10) в одном лишь $(M-2)$-м уравнении появляются ненулевые коэффициенты $X_{M-2,M-1}$ и $X_{M-2,M}$. Важно, что при этом остальные коэффициенты $X_{i,j}$, $i,j = 1, \ldots, (M-2)$ не изменяются. С другой стороны, в $(M-1)$-м и M-м уравнениях (см. рис.4)

$$X_{M-1,j} = 0,\ X_{M,j} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, (M-3).$$

Рассмотрим линейную комбинацию последних двух строк матрицы $X_{i,j}$:

$$Y_j = c_{M-1}X_{M-1,j} + c_M X_{M,j},\ c_{M-1}^2 + c_M^2 > 0.$$

Так как вершины a_{M-1} и a_M – соседние, то $(Y_{M-1}^2 + Y_M^2) > 0$ (что устанавливается непосредственно). Предположим, что имеет место равенство

$$Y_j = \sum_{i=1}^{M-2} c_i X_{i,j},\ 1 \leq j \leq M, \tag{11}$$

где c_i – некие числа. Имеются две возможности:

i) $Y_j = 0,\ 1 \le j \le (M-2)$. Тогда вследствие индуктивного предположения и сохранения матрицы $X_{i,j}$, $1 \le i, j \le (M-2)$ при переходе $(M-2) \to M$ для удовлетворения равенства (11) при $1 \le j \le (M-2)$ необходимо $c_1 = \ldots = c_{M-2} = 0$. Но тогда равенство (11) не удовлетворяется при $j = (M-1), M$.

ii) $Y_{M-2} \ne 0$. Из рис.4 видно, что тогда $c_{M-3} \ne 0$. Последнее неравенство в свою очередь влечет $c_{M-4} \ne$ $\ne 0$. Это означает противоречивость равенства (11). Действительно, $Y_j = 0$ при $j = 1, \ldots, (M-4)$, а соответствующие члены справа в (11) могут быть равны нулю лишь если $c_1 = \ldots = c_{M-4} = 0$.

Таким образом, равенство (11) не может быть удовлетворено, что означает справедливость утверждения в случае, изображенном на рис.4.

Утверждение доказывается аналогично во всех остальных случаях. При этом важно лишь, чтобы в процессе индуктивного доказательства вершины a_{M-1} и a_M были соседними.

В случае комплексов с нечетным числом внутренних вершин утверждение неверно в используемых здесь переменных. Однако несущественная модификация переменных позволяет сформулировать и доказать аналогичное утверждение. Это будет сделано в более подробной работе.

На этом этапе следует сформулировать более четкий критерий наличия вильсоновского удвоения. Предположим, что в системе уравнений (10) можно выбрать M независимых внутренних переменных и необходимое число независимых граничных переменных таким образом, что суммарное число независимых переменных меньше числа $(M+L-1)$. Поэтому обращение в нуль тех граничных переменных, которые содержатся в системе уравнений (10), не означает обращение в нуль (вследствие системы (10)) всех разностных переменных $\varphi_{i,j}$ для внутренних вершин a_i и a_j. В этом случае имеет место вильсоновское удвоение. Этот критерий вильсоновского удвоения можно применять также к части комплекса. Например, если взять часть комплекса, изображенного на рис.2, ограниченную 2 внутренними и 8 граничными вершинами (на рис.2 вершины этой части комплекса занумерованы индексами от 1 до 10), то в системе двух уравнений (10) содержится всего 7 независимых разностных переменных: 2 внутренних, $\varphi_{1,7}$ и $\varphi_{2,3}$, и 5 граничных, $\varphi_{5,3}$, $\varphi_{9,7}$, $\varphi_{4,6}$, $\varphi_{10,6}$ и $\varphi_{8,6}$. Всех же независимых разностных переменных на этом подкомплексе имеется 9. Вследствие системы уравнений (10) обращение в нуль указанных пяти граничных переменных влечет обращение в нуль внутренних переменных $\varphi_{1,7}$ и $\varphi_{2,3}$, но не разностной переменной $\varphi_{1,2}$, что, согласно нашему критерию, означает наличие вильсоновского удвоения. Для сколь угодно большого подкомплекса комплекса на рис.2 результат оказывается таким же.

Легко понять, что в случае нечетной решетки в системе уравнений (10) необходимо присутствуют все $(M+L-1)$ независимых разностных переменных. Это непосредственно следует из тождества

$$\varphi_{j(i)+1,j(i)} \equiv \sum_{0 \le k \le (n-1)/2} \varphi_{j(i)+2k+2,j(i)+2k}, \tag{12}$$

где n – (нечетное) число вершин на границе $\partial \mathfrak{v}_i$. Равенство (12) показывает, что *любые разностные переменные выражаются через разностные переменные, содержащиеся в системе уравнений (8)*. Поэтому обращение в нуль всех граничных переменных в системе уравнений (10) влечет обращение в нуль всех переменных $\varphi_{i,j}$.

Полученный результат можно переформулировать следующим образом. Будем рассматривать систему уравнений (8) для конечных подкомплексов нечетного комплекса с M внутренними вершинами. Пусть вершина a_i и хотя бы одна из вершин $a_{j(i)}$ и $a_{j(i)-2}$ – внутренние. На *нечетном* комплексе имеется M независимых переменных вида $\varphi_{j(i),j(i)-2}$, содержащихся в системе уравнений (8), через которые выражаются все разностные переменные вида $\varphi_{i,j}$, причем минор при этих переменных отличен от нуля. Действительно, на нечетном комплексе переход от независимой системы правильных внутренних переменных к независимой системе переменных вида $\varphi_{j(i),j(i)-2}$ сводится к линейному невырожденному преобразованию переменных[3)]. Следовательно, при $M \longrightarrow \infty$ миноры при любых независимых наборах переменных $\{\varphi_{j(i),j(i)-2}\}$, через которые выражаются все разностные переменные вида $\varphi_{i,j}$ в конечной области комплекса, отличны от нуля. Поэтому имеем

Утверждение 2. *На нечетных комплексах отсутствует вильсоновское удвоение.*

4. Приведем здесь также интересный качественный аргумент в пользу отсутствия удвоения на рассмотренной аморфной решетке.

Предположим, что поле ψ_i очень медленно изменяется при переходе на соседние узлы, так что поле ψ_i можно считать достаточно гладкой функцией координаты z. Тогда

$$\psi_j = \psi_i + (z_j - z_i)\,\partial_z \psi_i + (\overline{z}_j - \overline{z}_i)\,\partial_{\overline{z}} \psi_i + \ldots,$$

[3)] Такое преобразование переменных невозможно для комплекса, изображенного на рис.2.

где многоточие означает вклад от высших производных поля ψ. С учетом соотношений

$$\sum_{j(i)}(z_{j+1}-z_{j-1})\,z_j=0,\ \ \sum_{j(i)}(z_{j+1}-z_{j-1})\,\overline{z}_j=4\,i\,S_i \tag{13}$$

уравнение (6) или (6a), (6b), для собственной моды принимает вид

$$i\,\gamma^a\partial_a\psi+\alpha^a_{bc}(z,\,\overline{z})\,\gamma^a\partial_b\partial_c\psi+\ldots=\epsilon\,\psi, \tag{14}$$

где многоточие означает вклад от производных поля ψ степени выше двух. Функции $\alpha^a_{bc}(z,\,\overline{z})$ являются случайными, зависящими от расположения узлов решетки. Подчеркнем, что уравнение (14) справедливо для длинноволновых мягких мод, "растущих" над тривиальной нулевой модой.

Аналогичное уравнение для мягких мод, "растущих" над нетривиальными нулевыми модами (если таковые имеются) выглядит как

$$i\sum_{\xi=\prime,\,\prime\prime,\ldots}\alpha^{a\,(\xi)}_b(z,\,\overline{z})\,\gamma^a\partial_b\psi^{(\xi)}(a_i)+\ldots=\epsilon\,\psi\,(a_i). \tag{15}$$

Многоточие в (15) означает вклад от производных ветвей поля ψ выше первого порядка, а функции $\alpha^{a,\,(\prime,\,\prime\prime,\ldots)}_b(z,\,\overline{z})$ являются случайными величинами, зависящими от расположения вершин решетки, причем $\sum_{\xi=\prime,\,\prime\prime,\ldots}\alpha^{a\,(\xi)}_b(z,\,\overline{z})=\delta^a_b$. Таким образом, в уравнении (15) случайный фактор всегда имеет порядок единицы. Такой вид этого уравнения объясняется тем, что для отдельных сумм по штрихованным, дважды штрихованным и т.д. вершинам имеем (сравни с (13)): $\sum_{j'(i)}(z_{j'+1}-z_{j'-1})\,z_{j'}\neq 0$, а также суммы $\sum_{j'(i)}(z_{j'+1}-z_{j'-1})\,\overline{z}_{j'}$ не пропорциональны площади S_i.

При помощи теории распространения волн в неупорядоченных средах (см., например, [9]) можно сделать вывод, что решения уравнения (15) будут качественно отличаться от плоских волн. Напротив, в длинноволновом пределе роль вкладов от высших производных в решения уравнения (14) будет падать. Можно утверждать, что над тривиальными нулевыми модами "растут" длинноволновые мягкие моды. Напротив, такого вывода нельзя сделать для нетривиальных нулевых мод, если $\partial_a\psi^{(\prime)}\neq\partial_a\psi^{(\prime\prime)}\neq\ldots$. В этом случае, как показывают уравнения (14) и (15), свойства мягких мод, растущих над тривиальной и нетривиальными нулевыми модами, качественно различаются, что исключает удвоение.

Таким образом, приемлемые по физическим свойствам мягкие моды, растущие над нетривиальными нулевыми модами, могут существовать лишь если $\partial_a\psi^{(\prime)}=\partial_a\psi^{(\prime\prime)}=\ldots$ и каждая из ветвей $\psi^{(\prime)}$, $\psi^{(\prime\prime)},\ldots$ удовлетворяет уравнению вида (14). Так как в этом случае $(\psi^{(\prime)}-\psi^{(\prime\prime)})=\mathrm{const}\neq 0$, то удовлетворение системы уравнений (6) приводит к ограничению всего $2(M+L)$-мерного пространства переменных $\{z_i\}$ до подпространства размерности $2(M+L-N+s-1)$, где N – число внутренних нечетных вершин комплекса, а s – число ветвей нетривиальной нулевой моды. Действительно, для соответствующих ветвей нетривиальной нулевой моды имеем $\varphi'=c'$, $\varphi''=c''$ и т.д. Тогда в каждой внутренней нечетной вершине a_i, $i=1,\ldots,N$, имеем уравнение вида

$$c'\sum_{j'(i)}z_{j'+1,j'-1}+c''\sum_{j''(i)}z_{j''+1,j''-1}=0. \tag{16}$$

Исключая из системы уравнений (16) конечное (равное s) число констант c', c'', ..., мы получаем дополнительно $(N-s+1)$ связь между переменными $z_{i,j}$, что и приводит к ограничению всего пространства переменных $\{z_i\}$[4)]. В исходной статистической сумме это подпространство имеет меру нуль и потому нетривиальные нулевые моды несущественны. Мы опять приходим к выводу: на нечетных аморфных решетках вильсоновское удвоение невозможно.

5. Теперь мы можем сделать вывод, что в рассматриваемой модели на нечетных решетках все билинейные формы относительно фермионного поля в длинноволновом пределе состоят из одной компоненты. Точнее это утверждение формулируется как возможность введения на нечетной решетке одного вейлевского поля, остающегося в непрерывном пределе единственным вейлевским же (а не дираковским) полем. Технически это достигается при помощи известных проекционных операторов. Например, при выделении φ-компоненты дираковского поля в действии (2) следует сделать замены $\overline{\psi}\to\overline{\psi}\,[1/2\,(1+\gamma^5)]$, $\psi\to[1/2\,(1-\gamma^5)]\,\psi$.

Автор выражает благодарность А. Иоселевичу, С. Савченко, Г. Воловику и Р. Зайцеву за многочисленные обсуждения, а также Е. Кузнецову и П. Гриневичу за полезные критические замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы РФФИ ВНШ (грант # 00-1596579).

1. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **120**, 1069 (2001).
2. K. G. Wilson, *Erice lectures notes*, 1975.

[4)]Заметим, что если бы вершина a_i была четной, то множество вершин с индексами $j(i)$ разбивалось бы на два подмножества вершин с индексами $j'(i)$ и $j''(i)$ таких, что $\sum_{j'(i)}z_{j'+1,j'-1}\equiv 0$ и $\sum_{j''(i)}z_{j''+1,j''-1}\equiv 0$. В этом случае уравнение (16) удовлетворялось бы тождественно и не приводило бы ни к каким связям между переменными z_j.

3. J. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. **D11**, 393 (1975).
4. L. Susskind, Phys. Rev. **D16**, 3031 (1977).
5. H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. **B185**, 20 (1981); Nucl. Phys. **B193**, 173 (1981).
6. Martin Luscher, E-print archives hep-th/0102028.
7. Л. С. Понтрягин, *Основы комбинаторной топологии*, М.: Наука, 1976; П. Дж. Хилтон, С. Уайли, *Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию.*, М.: Мир, 1966.
8. С. П. Новиков, И. А. Дынников, УМН **52**, 175 (1997).
9. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем.*, М.: Наука, 1982; Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, *Электронные свойства легированных полупроводников.*, М.: Наука, 1979.