Письма в ЖЭТФ, том 76, вып. 1, с. 38 – 42

О возможности экспериментальной проверки некоторых предсказаний теории локализации

А. Г. Грошев, С. Г. Новокшонов[1)]

Физико-технический институт, Уральского отделения РАН, 426001 Ижевск, Россия

Поступила в редакцию 20 мая 2002 г.

Пространственная нелокальность (дисперсия) уравнений переноса ведет к нелинейной зависимости падения напряжения U от расстояния между точками его измерения. Вследствие этого результаты обычных двухзондовых измерений проводимости существенно зависят от соотношения между линейными размерами образца L и масштабом пространственной дисперсии R обобщенного коэффициента диффузии $D(q,\omega)$. Это дает возможность получить информацию о характере пространственной нелокальности $D(q,\omega)$ в окрестности перехода Андерсона и, в частности, о значении корреляционной мультифрактальной размерности D_2 электронных волновых функций вблизи порога подвижности.

PACS: 71.30.+h, 72.15.Rn

1. Последние несколько лет большое внимание привлекала проблема пространственной дисперсии (нелокальности) кинетических коэффициентов неупорядоченных систем в окрестности перехода Андерсона [1 – 6]. Причиной такого интереса явилось осознание того, что характер $q\omega$-зависимости обобщенного коэффициента диффузии $D(q,\omega)$ вблизи порога подвижности тесно связан с критическим поведением электронных волновых функций и в конечном итоге определяется сценарием перехода металл – диэлектрик [1, 3]. Действительно, критерий локализации Березинского–Горькова [7] требует одновременного (при всех значениях волнового числа q) обращения в нуль $D(q,0)$ в локализованной фазе, а согласно гипотезе однопараметрического скейлинга, должно выполняться соотношение [8]

$$D(t;q,\omega) = b^{2-d} D(b^{1/\nu}t; bq, b^d\omega), \quad 2 < d < 4. \tag{1}$$

Здесь $t = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_c)/\mathcal{E}_c$ – расстояние до порога подвижности $\mathcal{E}_c$, b – масштабный множитель, d – размерность пространства, ν – критический индекс корреляционной длины.

Этим общим требованиям удовлетворяют два качественно разных варианта критического поведения $D(q,\omega)$:

• Согласно гипотезе Чолкера [1] мультифрактальность электронных волновых функций вблизи порога подвижности ($t \to 0$ и/или $\omega \to 0$) ведет к аномально *сильной* пространственной дисперсии обобщенного коэффициента диффузии, масштабы которой $R = \min(\xi, L_\omega) \to \infty$, где $\xi \propto |t|^{-\nu}$ – корреляционная длина, $L_\omega \propto \sqrt{D(\omega)/\omega} \propto \omega^{-1/d}$ – длина диффузии электрона за время $\sim 1/\omega$ [1, 2]. В зависимости от соотношения между ξ, L_ω и q Чолкер выделяет четыре основные асимптотики [1]:

$$D(q,\omega) = D_0 \left(\frac{l}{R}\right)^{d-2} \begin{cases} 1, & qR \ll 1, \\ (qR)^{d-2-\eta}, & qR \gg 1, \end{cases} \tag{2}$$
$$R = \min(\xi, L_\omega).$$

Здесь D_0 – коэффициент диффузии Друде, l – средняя длина свободного пробега, η – аномальный критический индекс, связанный с мультифрактальной корреляционной размерностью волновых функций D_2 ($\eta = d - D_2$) [2].

• В то же время, симметрийный подход Суслова к теории локализации [4] предсказывает *подавление* вплоть до атомных масштабов ($R \sim \lambda_F$) пространственной дисперсии коэффициента диффузии в окрестности перехода Андерсона. Позднее этот вывод был подтвержден в рамках обобщенной формулировки [5, 6] самосогласованной теории Волльхардта–Вельфле [9]. Согласно [5, 6], в режиме андерсоновской локализации

$$D(q,\omega) = \frac{D(t,\omega)}{1+(qR)^2}, \qquad qR \ll 1, \tag{3}$$

где масштаб нелокальности $R \propto \sqrt{D_0\tau}|D(t,\omega)/D_0|$ и убывает как $D(t,\omega) \propto \left[\min(\xi, L_\omega)\right]^{2-d}$ вплоть до насыщения при $R \sim \lambda_F$.

В обзоре Суслова [3] обращается внимание на то, что отсутствие аномально сильной пространственной дисперсии обобщенного коэффициента диффузии в окрестности порога подвижности отнюдь не противоречит концепции мультифрактальности электронных волновых функций, а лишь указывает на то,

[1)]e-mail: nov@otf.fti.udmurtia.su

что должно выполняться равенство $\eta = d - 2$ (или $D_2 = 2$). Известный результат Вегнера $\eta = 2\epsilon$ ($\epsilon = d - 2 \ll 1$) [10] на самом деле непосредственно касается критического поведения "обратной доли участия" (см. [10]). В то же время используемая в [1, 2, 11] связь этой величины с $D(q, \omega)$ по ряду причин не может считаться корректной[2)], поэтому, на наш взгляд, противоречие здесь только кажущееся. То же самое можно сказать и относительно результатов численного моделирования $\eta = 1.2 \pm 0.15$, $\eta = 1.3 \pm 0.2$, $\eta = 1.5 \pm 0.3$ [2] и $\eta = 1.3 \pm 0.2$ [11], полученных различными методами при $d = 3$.

Эта дилемма, затрагивающая фундаментальные понятия андерсоновской локализации, требует своего разрешения, как теоретического, так и экспериментального. В этой заметке мы выводим материальное уравнение, связывающее в пространственно неоднородном случае силу тока с измеряемой разностью электрохимических потенциалов, и предлагаем схему измерения, которая позволяет получить информацию о степени нелокальности коэффициента диффузии носителей заряда.

2. Падение напряжения U, измеряемое в пространственно неоднородном случае, равно разности электрохимических потенциалов $\Delta U = \Delta\zeta/e = \Delta\varphi + \Delta\mu/e$ между соответствующими точками проводника. Следовательно при вычислении плотности тока необходимо учитывать отклик системы как на механическое возмущение (электрический потенциал φ) так и на термическое (химический потенциал μ)[3)], обусловленное неоднородным распределением электронов в проводнике.

Применяя к рассматриваемой задаче общие уравнения теории линейного изотермического отклика [12, 13], мы получим материальное уравнение, связывающее плотность полного тока с градиентом электрохимического потенциала. Его фурье-представление при $q \ll k_F$ имеет следующий вид:

$$j(q,\omega) = -iqen_F D(q,\omega)\zeta(q,\omega) = -iq\sigma(q,\omega)U(q,\omega)/e, \tag{4}$$

где n_F – плотность состояний на уровне Ферми, $\sigma(q,\omega)$ – измеряемая электропроводность, связанная с $D(q,\omega)$ соотношением Эйнштейна. Следует подчеркнуть, что $\sigma(q,\omega)$ не является кубовским кинетическим коэффициентом

$$\widetilde{\sigma}(q,\omega) = e^2 n_F \frac{D(q,\omega)}{1 + i(q^2/\omega)D(q,\omega)}, \tag{5}$$

которое, в отличие от $\sigma(q,\omega)$ (см уравнение (4)), связывает плотность полного тока с действующим в системе электрическим полем. Лишь в однородном случае ($q = 0$) $\sigma(0,\omega) = \widetilde{\sigma}(0,\omega)$, и (5) совпадает с соотношением Эйнштейна.

Уравнения (4) и (5) описывают нелокальный линейный отклик пространственно неограниченной однородной системы. В общем случае нелокальность материальных уравнений имеет более сложный характер. В типичной для эксперимента геометрии образец имеет форму плоскопараллельного слоя толщиной L. В этом случае диффузионный пропагатор носителей заряда $\widetilde{G}(x,x';\omega)$ является решением уравнения

$$-i\omega\widetilde{G}(x,x';\omega) - \\ -\frac{\partial}{\partial x}\int_{-L/2}^{L/2} \widetilde{D}(x,y;\omega)\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{G}(y,x';\omega)\mathrm{d}y = \delta(x - x') \tag{6}$$

с открытыми граничными условиями

$$\widetilde{G}(x,x';\omega)|_{x,x'=\pm L/2} = 0. \tag{7}$$

Интегральное ядро этого уравнения (нелокальный коэффициент диффузии) входит в материальное уравнение, которое связывает электрический ток с градиентом электрохимического потенциала (падение напряжения)

$$I(x) = -e^2 n_F S \int_{-L/2}^{L/2} \widetilde{D}(x,x';\omega)\frac{\partial}{\partial x'}U(x')\mathrm{d}x', \tag{8}$$

где $S \propto L^{d-1}$ – площадь поперечного сечения образца. Решение краевой задачи (6), (7) в отсутствие пространственной дисперсии ($\widetilde{D}(x,x';\omega) = D(\omega)\delta(x - x')$) дает хорошо известный метод изображений [14]:

$$\widetilde{G}(x,x';\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big[G\big(x - x' + 2nL;\omega\big) - \\ - G\big(x + x' + (2n+1)L;\omega\big)\Big],$$

$$G(x;\omega) = \frac{1}{L}\sum_q \frac{\exp(iqx)}{-i\omega + q^2 D(\omega)}. \tag{9}$$

[2)] Подробное обсуждение основных аргументов за и против гипотезы $\eta = d - 2$ можно найти в [3].

[3)] Неоднородное пространственное распределение электронов ведет не только к возмущению электрического поля в проводнике, которое предполагается учтенным в φ, но также и к появлению диффузионной составляющей в измеряемой плотности полного тока. Именно последний представляет собой отклик на термическое возмущение.

Здесь $G(x,\omega)$ – диффузионный пропагатор неограниченной, пространственно однородной системы. Мы предполагаем, что решение (9) остается справедливым и при наличии пространственной дисперсии, если ее масштаб мал по сравнению с размерами образца ($R \ll L$). В этом случае интегральное ядро материального уравнения (8) по аналогии с (9) выражается через обобщенный коэффициент диффузии $D(q,\omega)$ неограниченной пространственно однородной системы:

$$\widetilde{D}(x,x';\omega) = \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[D(\overline{q}_n,\omega)\sin\overline{q}_n x\,\sin\overline{q}_n x' + D(q_n,\omega)\cos q_n x\,\cos q_n x'\Big], \qquad (10)$$

где $\overline{q}_n = 2\pi n/L$ и $q_n = \pi(2n+1)/L$ — дискретные значения волновых чисел.

Учитывая, что падение напряжения $U(x)$ является нечетной функцией x, а сила тока $I(x) = I$ постоянна вдоль исследуемого образца, представим их в виде соответствующих рядов Фурье. Тогда после подстановки (10) в материальное уравнение (8) нетрудно найти выражение для коэффициента Фурье U_n. Окончательно x-зависимость падения напряжения может быть представлена в виде следующего ряда Фурье:

$$U(x) = \frac{4I}{LSe^2n_F}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{q_n^2 D(q_n,\omega)}\sin q_n x, \quad |x| < L/2. \qquad (11)$$

3. При не зависящем от волнового числа q_n коэффициенте диффузии ряд (11) дает для проводника конечных размеров обычное определение кондактанса $g(L,\omega) = L^{d-2}e^2n_F D(0,\omega) = L^{d-2}\sigma(\omega)$ и описывает внутри образца ($|x| < L/2$) линейно меняющееся падение напряжения $U(x) \propto x$. Пространственная нелокальность обобщенного коэффициента диффузии $D(q_n,\omega)$ изменяет определение кондактанса

$$\frac{1}{g(L,\omega)} = \frac{8}{LSe^2n_F}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{q_n^2 D(q_n,\omega)} \qquad (12)$$

и ведет к нелинейной x-зависимости падения напряжения (11). Таким образом, информация о пространственной дисперсии обобщенного коэффициента диффузии носителей заряда $D(q,\omega)$ может быть получена путем измерения нелинейной части $U(x)$ (11):

$$\Delta U(x) = U(x) - \frac{2x}{L}U\big(L/2\big). \qquad (13)$$

Рассмотрим образец в форме плоскопараллельного слоя толщиной $L \gg R$ (R — масштаб пространственной нелокальности) с идеальными омическими контактами на противоположных поверхностях и с двумя потенциальными измерительными зондами, расположенными симметрично на расстоянии x от средней плоскости (см. рис.1a). Измерительные зонды лучше расположить вблизи точек $x_{\max}$, где $\Delta U(x)$ достигает максимального значения $\Delta U_{\max}$. Для измерения нелинейной части падения напряжения (13) необходима еще одна пара потенциальных зондов, роль которых здесь выполняют омические контакты.

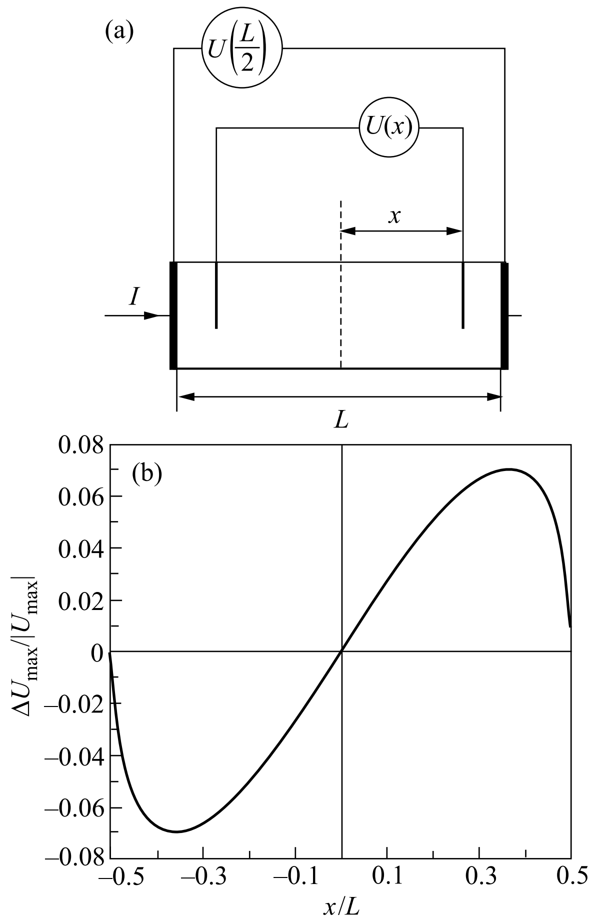

Рис.1. (a) Схема измерения нелинейной части падения напряжения (здесь изображено продольное сечение исследуемого образца). (b) Типичная зависимость нелинейной части падения напряжения от положения x измерительных зондов. Кривая рассчитана с использованием асимптотик Чолкера (2) для $\eta = 1.3$ и для $R/L = 0.1$

Подстановка (3) в (11), (13) дает $\Delta U(x) = 0$. Строго говоря, это равенство выполняется при идеальной компенсации линейной части падения напряжения. Но в любом случае измеряемый сигнал мал по параметру $R/L \ll 1$. Отличный от нуля вклад в $\Delta U(x)$ вносят только нетривиальные q-

зависимости обобщенного коэффициента диффузии из (2). На рис.1b приведены типичные зависимости $\Delta U(x)$, вычисленные с использованием линейной интерполяции между различными чолкеровскими асимптотиками (2) для обратного коэффициента диффузии $1/D(q,\omega)$ при $qR \ll 1$ и $qR \gg 1$. В этом случае $x_{\max}$ не зависит от масштабов пространственной нелокальности $D(q,\omega)$ и при $\eta = 1.1 \div 1.5$ принимает значения из интервала $x_{\max} \approx (0.70 \div 0.76)L/2$. Вычисленное в этих точках $\Delta U_{\max}$ имеет следующие асимптотики

$$\Delta U_{\max} \propto \left(\frac{R}{L}\right)^{\eta} \propto \begin{cases} \omega^{-\eta/d}, & L_\omega \ll \xi, \\ \xi^{\eta} \propto |t|^{-\nu\eta}, & L_\omega \gg \xi, \end{cases} \qquad (14)$$

$$L_\omega, \xi \ll L.$$

Можно предложить два варианта измерений сигнала (14). В первом исследуется частотная зависимость $\Delta U_{\max}(\omega)$ в образце с фиксированным уровнем беспорядка в достаточно малой окрестности порога подвижности на металлической стороне перехода ($|t| \ll 1$). Согласно (14) и предсказаниям [1] при понижении частоты должен наблюдаться рост $\Delta U_{\max} \propto \omega^{-\eta/d}$ ($\omega \gg \omega_c$) вплоть до насыщения, достигаемого при $\Delta U_{\max} \propto (\xi/L)^{\eta} (\omega \ll \omega_c)$. Критическая частота ω_c определяется условием $L_{\omega_c} = \xi$ или $\hbar\omega_c \approx \lambda_F^{-d} n_F^{-1} |t|^{\nu d}$, где λ_F – длина волны де Бройля на уровне Ферми.

Во втором варианте измеряется зависимость $\Delta U_{\max}$ (14) от безразмерного расстояния t до порога подвижности $\mathcal{E}_c$ при некотором фиксированном значении частоты ω. По-видимому, наиболее простым методом изменения t в окрестности $\mathcal{E}_c$ является управление положением уровня Ферми под давлением [15]. Очень удобным материалом для таких измерений является Si : P, в котором использование этой техники позволяет достичь значений $|t| \approx 10^{-3}$ [15]. Согласно (14) и предсказаниям [1], при понижении t должен наблюдаться рост $\Delta U_{\max} \propto t^{-\nu\eta}$ ($t \gg t_\omega$) вплоть до насыщения, достигаемого при $\Delta U_{\max} \propto (L_\omega/L)^{\eta}$ ($t \ll t_\omega$). Здесь критическое значение t_ω определяется условием $L_\omega = \xi$ или $\lambda_F^d n_F \hbar\omega \approx |t_\omega|^{\nu d}$.

На рис.2 представлены графики таких зависимостей, полученных из (11), (13) с использованием интерполяции $R^{-1} = \xi^{-1} + L_\omega^{-1}$ для масштаба нелокальности. Поскольку в достаточно малой окрестности порога подвижности масштаб нелокальности $D(q,\omega)$ (2) принимает аномально большие значения $R = \min(L_\omega, \xi)$, величина сигнала $\Delta U_{\max}$ (14) вполне доступна для измерений. Как показывают оценки, в образцах Si : P с типичными значениями концентрации фосфора $n_{\rm P} \approx 10^{18}\text{см}^{-3}$ и при реально достижимых значениях $|t| \approx 10^{-2} \div 10^{-3}$ предсказываемые здесь зависимости $\Delta U_{\max}$ (см. уравнение (14) и рис.2) должны наблюдаться в доступной для зондовых измерений области частот ω. Например, при $t \approx 10^{-3}$ критическое значение частоты равно $\omega_c \approx 10^3 \div 10^4\,\text{с}^{-1}$ (см. рис.2a), а соответствующие им корреляционные длины имеют порядок $L_{\omega_c} \sim \xi \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$см.

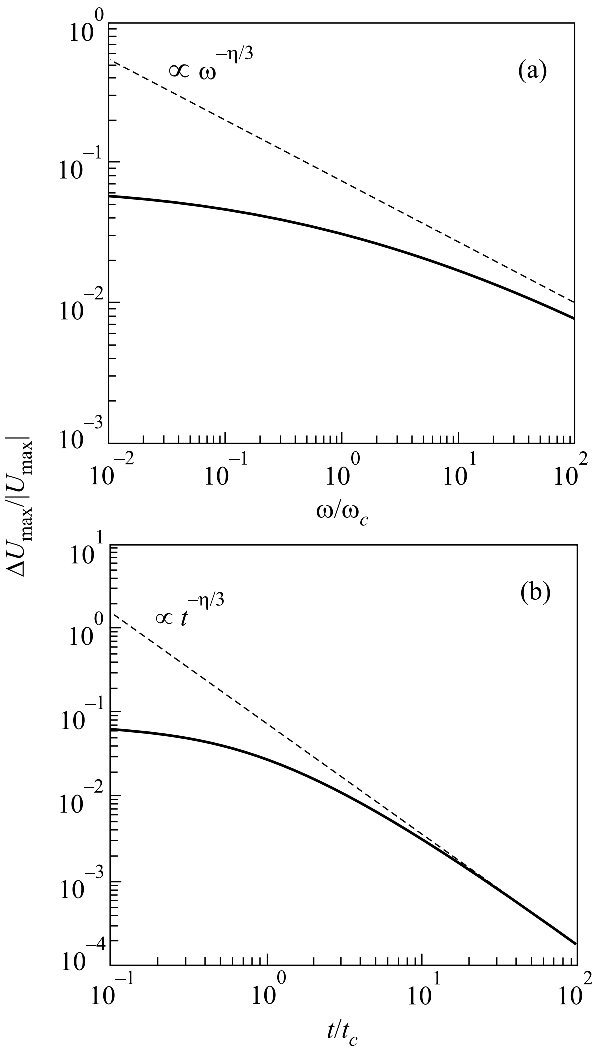

Рис.2. Типичные зависимости $\Delta U_{\max}$ от частоты ω (a) и безразмерного расстояния до порога подвижности t (b), рассчитанные с помощью уравнений (11), (13) и асимптотик Чолкера (2) для $\eta = 1.3$. Штриховые линии изображают асимптотическое поведение, предсказываемое уравнением (14)

Таким образом, факт наличия [1, 2] или подавления [4 – 6] аномальной пространственной дисперсии обобщенного коэффициента диффузии вблизи перехода Андерсона имеет принципиальное значение для понимания микроскопического механизма явления локализации и, на наш взгляд, может быть проверен экспериментально.

Авторы благодарят И. М. Суслова, обратившего их внимание на эту проблему. Мы также признательны ему за плодотворные дискуссии и постоянный интерес к этой работе.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант # 99–1070).

---

1. J. T. Chalker, Physica **A167**, 253 (1990).
2. T. Brandes, B. Huckestein, and L. Schweitzer, Ann. Phys. **5**, 633 (1996).
3. И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).
4. И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).
5. А. Г. Грошев, С. Г. Новокшонов, ЖЭТФ **111**, 1787 (1997).
6. С. Г. Новокшонов, А. Г. Грошев, ЖЭТФ **114**, 711 (1998).
7. В. Л. Березинский, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **77**, 2498 (1979).
8. E. Abrahams and P. A. Lee, Phys. Rev. **B33**, 683 (1986).
9. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. **B22**, 4666 (1980).
10. F. Wegner, Z. Phys. **B36**, 209 (1980).
11. K. Slevin and T. Ohtsuki, Phys. Rev. Lett. **82**, 382 (1999).
12. Д. Н. Зубарев, *Современные методы статистической теории неравновесных процессов*, в кн. *Современные проблемы математики*, т. 15, М: ВИНИТИ АН СССР, 1979, р. 131.
13. В. П. Калашников, Препринт ОИЯИ, Дубна, N Р4 – 7803 (1974).
14. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1981.
15. M. A. Paalanen, S. Sachdev, R. N. Bhatt, and A. E. Ruckenstein, Phys. Rev. Lett. **57**, 2061 (1986).