

Эффект увлечения бозе-конденсата в системе двух связанных ловушек

М. В. Демин, Ю. Е. Лозовик¹⁾, В. А. Шаратов

Институт спектроскопии, 142190 Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 28 июня 2002 г.

Рассматривается система, состоящая из двух плоских ловушек, расположенных друг над другом и удерживающих бозе-конденсат атомов. Исследуется возможность увлечения атомов одной ловушки атомами другой ловушки при вращении последней. Найдено среднее значение момента импульса системы атомов во второй ловушке, индуцированное вращением первой ловушки.

PACS: 34.10.+x, 34.50.Ez

Открытие бозе-конденсации охлажденных атомов в ловушках ([1–3]) индуцировало изучение ряда новых физических явлений (см. обзоры [4, 5]). Одним из интересных физических объектов является система двух расположенных рядом ловушек. В частности, эта система перспективна для изучения эффекта Джозефсона и т.п. В данной работе рассматривается эффект увлечения атомов в системе двух плоских, пространственно разделенных и находящихся друг над другом ловушек, удерживающих бозе-конденсат атомов. Мы полагаем, что эти ловушки находятся одна над другой на таком расстоянии, что взаимодействием атомов из разных ловушек нельзя пренебречь (“вертикально связанные ловушки”). Двумерность ловушек означает, что расстояние между уровнями размерного квантования ($\hbar\omega_z$) вдоль меньшего из размеров значительно больше характерных энергий двумерного бозе-газа – химического потенциала μ_{2D} , kT и т.д. В терминах характерных длин это подразумевает, что характерная длина волны де-Бройля атомов $\lambda = \hbar/\sqrt{mE}$, где E – вышеупомянутые характерные энергии (μ_{2D} , kT), больше, чем вертикальный размер ловушки $\ell_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$. Удерживающий потенциал для атомов в двумерных ловушках можно записать следующим образом:

$$V_{j\text{ext}}(x, y) = \frac{m\omega_{jx}^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_{jy}^2 y^2}{2}, \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

Можно указать на два различных механизма увлечения в расположенных рядом ловушках:

1. Эффект увлечения, когда при движении атомов первой ловушки увлекается лишь нормальная компонента во второй ловушке²⁾.

2. Пусть удерживающий потенциал одной из ловушек, для определенности нижней, является анизотропным в плоскости xy . Приведем во вращение (с угловой скоростью Ω) удерживающий потенциал нижней, анизотропной ловушки. Пусть Ω – мало, так что в этой ловушке вихри не возникают. При условии адиабатичности распределение плотности атомов обладает симметрией вращающейся ловушки. Для того чтобы подчеркнуть суть предсказываемого эффекта, будем считать сначала удерживающий потенциал второй ловушки изотропным. За счет взаимодействия между атомами в разных ловушках, в верхней ловушке, как будет показано далее, возникает анизотропный эффективный удерживающий потенциал, вращающийся с той же угловой скоростью, что и нижняя, анизотропная ловушка. Это приводит к вращению системы атомов в верхней ловушке, то есть к возникновению индуцированного момента импульса $M_{2z} = J_{21}\Omega$. Нашей задачей является расчет коэффициента увлечения J_{21} (“взаимного момента инерции”), который является линейным откликом верхней ловушки на вращение нижней. Интересно, что в рассматриваемом анизотропном случае должна увлекаться как сверхтекучая, так и нормальная компонента.

В данной работе мы исследуем описанный выше второй эффект, то есть эффект увлечения за счет анизотропии в плотности распределения бозе-газа в первой ловушке и *наведенной* анизотропии во второй. Пусть в анизотропной ловушке 1 создается вращение бозе-газа вокруг оси z , а в ловушке 2 удерживающий

¹⁾e-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

²⁾Этот эффект имеет место при произвольной форме ловушек. Ему будет посвящена другая работа.

потенциал изотропен в плоскости xy , и газ в ней первоначально покоится. При расстоянии между ловушками большем, чем положение минимума потенциала взаимодействия между атомами, взаимодействие между атомами в разных ловушках можно описать потенциалом Ван-дер-Ваальса:

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{\alpha_6}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + D^2]^3}. \quad (2)$$

Рассмотрим обычно исследуемую экспериментально ситуацию – разреженный бозе-газ при температуре ниже температуры бозе-конденсации. Тогда число атомов в бозе-конденсате в ловушках много больше числа надконденсатных частиц. Будем также считать что для атомов в ловушках справедливо приближение Томаса-Ферми.

Уравнение типа Гросса-Питаевского для конденсата во второй (первоначально покоящейся) ловушке с учетом взаимодействия с первой ловушкой записывается следующим образом³⁾:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{2\text{ext}} - \mu_2 + gn_c + 2g\tilde{n} + \widehat{U}_1 \right] \Phi, \quad (3)$$

где

$$\widehat{U}_1(\mathbf{r}) = \int \psi_1^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (4)$$

а ψ_1^\dagger, ψ_1 – полевые операторы в первой (вращающейся) ловушке, μ_2 – химический потенциал, n_c – плотность конденсата, \tilde{n} – плотность надконденсатных частиц. Константа эффективного взаимодействия g (а также основное состояние) в двумерном бозе-газе изучены в работах [6, 7]; величина g равна:

$$g = \frac{2\sqrt{2\pi}\hbar^2}{m} \left[\ell_z/a - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln(\pi p_{12}^2 \ell_z^2) \right]^{-1}, \quad (5)$$

где $\mathbf{p}_{12} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/2$ – относительный импульс двух атомов, a – 3D амплитуда s -рассеяния, а $\ell_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$. В работе [8] было показано, что в разреженном бозе-газе зависимостью от относительного импульса можно пренебречь и ввести эффективную длину рассеяния \tilde{a} :

$$\frac{2\pi\hbar^2}{m} \tilde{a} = \frac{2\sqrt{2\pi}\hbar^2}{m} a/\ell_z. \quad (6)$$

³⁾ Уравнение (3) получено из системы двух связанных уравнений Гросса-Питаевского для связанных ловушек. Обратное влияние второй ловушки на вращающуюся первую ловушку пренебрежимо, поскольку наведенная анизотропия второй ловушки мала по сравнению с исходной.

Из уравнения (3) видно, что влияние атомов первой ловушки (в которой газ вращается) на вторую сводится к появлению дополнительного эффективного потенциала $U_1(\mathbf{r})$, который в рассматриваемом приближении сводится к добавке к удерживающему потенциалу $V_{2\text{ext}}$. Чтобы понять характер изменений в состоянии бозе-конденсата во второй ловушке нужно найти эффективный потенциал в явном виде. В приближении Томаса-Ферми он записывается следующим образом:

$$\widehat{U}_1(\mathbf{r}) = \int n_{TF}(\mathbf{r}', t) U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (7)$$

где

$$n_{TF}(\mathbf{r}', t) = \frac{\mu_1 - V_{1\text{ext}}(\mathbf{r}', t)}{g}. \quad (8)$$

Интегрирование, как это видно из формулы для плотности n_{TF} , проводится по области $V_{1\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \leq \mu$, которая зависит от времени t . Для вычисления этого интеграла перейдем во вращающуюся систему отсчета, в которой первая ловушка покоится. Этим мы добьемся того, что область интегрирования зафиксирована во времени, а зависимость от времени перенесется в потенциал взаимодействия $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Уравнение (7) мы перепишем следующим образом:

$$\widehat{U}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \iint \frac{\alpha_6}{2g} \frac{(2\mu_1 - m\omega_{1x}^2 x'^2 - m\omega_{1y}^2 y'^2)}{((x' - \tilde{x})^2 + (y' - \tilde{y})^2 + D^2)^3} dx dy, \quad (9)$$

где $\tilde{x} = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t$ и $\tilde{y} = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t$. Поскольку потенциал взаимодействия ловушек на расстоянии $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = D$ убывает почти на порядок: $U(0)/U(D) = 8$, то его можно заменить на более простой и удобный для вычислений:

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{\alpha_6}{D^6}, & \text{при } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq D \\ 0, & \text{при } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > D \end{cases}. \quad (10)$$

Пусть продольные размеры вращающейся ловушки больше размеров второй ловушки (другие случаи дают качественно схожие результаты) и $D \ll R_{tr}$, где R_{tr} – горизонтальные размеры ловушек. Вычисляя наведенный потенциал (9), находим:

$$\widehat{U}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\pi\alpha_6}{D^4 2g} \times \left[2\mu_1 - \frac{mD^2(\omega_{1x}^2 + \omega_{1y}^2)}{4} - m(\omega_{1x}^2 \tilde{x}^2 + \omega_{1y}^2 \tilde{y}^2) \right]. \quad (11)$$

Таким образом, мы видим, что влияние первой ловушки, которое записывается с помощью U_1 , приво-

дит к изменению как химического потенциала бозе-газа, так и эффективного удерживающего потенциала во второй ловушке:

$$\mu_2^{\text{eff}} = \mu_2 + \frac{\pi\alpha_6}{D^4 2g} \left[2\mu_2 - \frac{mD^2(\omega_{1x}^2 + \omega_{1y}^2)}{4} \right], \quad (12)$$

$$V_{2\text{ext}}^{\text{eff}}(x, y) = \frac{m\omega_{2x}^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_{2y}^2 y^2}{2} - \frac{\pi\alpha_6}{D^4 2g} [m(\omega_{1x}^2 \tilde{x}^2 - \omega_{1y}^2 \tilde{y}^2)]. \quad (13)$$

В результате уравнение для бозе-конденсата во второй ловушке выглядит так:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{2\text{ext}}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) - \mu_2^{\text{eff}} + gn_c + 2g\tilde{n} \right] \Phi. \quad (14)$$

Исследуем подробнее эффективный потенциал $V_{2\text{ext}}^{\text{eff}}(\mathbf{r})$. Он представляет собой квадратичную форму относительно координат x и y :

$$V_{2\text{ext}}^{\text{eff}}(x, y) = \frac{m}{2}(ax^2 + bxy + cy^2), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \omega_{2x}^2 - \gamma(\omega_{1x}^2 \cos^2 \Omega t + \omega_{1y}^2 \sin^2 \Omega t), \\ c &= \omega_{2y}^2 - \gamma(\omega_{1x}^2 \sin^2 \Omega t + \omega_{1y}^2 \cos^2 \Omega t), \\ b &= \gamma(\omega_{1x}^2 - \omega_{1y}^2) \sin 2\Omega t, \\ \gamma &= \pi\alpha_6/D^4 g. \end{aligned}$$

Исследуем потенциал в зависимости от параметров ловушек.

I. Пусть обе ловушки изотропны, то есть $\omega_{2x} = \omega_{2y} = \omega_2$ и $\omega_{1x} = \omega_{1y} = \omega_1$. Тогда, подставляя эти параметры в уравнение (15), получим:

$$V_{2\text{ext}}^{\text{eff}}(x, y) = \frac{m}{2}(\omega_2^2 - \gamma\omega_1^2)(x^2 + y^2). \quad (16)$$

Таким образом, мы видим, что в этом случае происходит просто деформация эффективного удерживающего потенциала $\omega_2^{\text{eff}} = \sqrt{\omega_2^2 - \gamma\omega_1^2}$. Никакого эффекта увлечения не наблюдается. Этого следовало ожидать, так как нет анизотропии в плотности распределения атомов вращающегося бозе-конденсата.

II. Если $\omega_{1x} \neq \omega_{1y}$, то возникает принципиально новый эффект. Повернем нашу систему координат так, чтобы избавиться от перекрестного произведения xy . Угол поворота φ находится из равенства $\tan 2\varphi = b/(c - a)$. Эффективный удерживающий потенциал в новой системе координат выглядит следующим образом:

$$V_{2\text{ext}}^{\text{eff}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{m}{2}(\tilde{\omega}_{2x}^2 \tilde{x}^2 + \tilde{\omega}_{2y}^2 \tilde{y}^2), \quad (17)$$

где

$$\tilde{\omega}_{2x}^2 = a \cos^2 \varphi + c \sin^2 \varphi - b \cos \varphi \sin \varphi \quad (18)$$

$$\tilde{\omega}_{2y}^2 = a \sin^2 \varphi + c \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi.$$

Таким образом,

$$\tan 2\varphi = \frac{\sin 2\Omega t}{\beta + \cos 2\Omega t}, \quad (19)$$

где $\beta = (\omega_{2y}^2 - \omega_{2x}^2)/\gamma(\omega_{1y}^2 - \omega_{1x}^2)$. Рассмотрим два случая:

а) Если $\omega_{2x} = \omega_{2y} = \omega_2$, то $\beta = 0$. Далее получим выражения для угла поворота системы координат φ и угловой скорости $\Omega_2 = \dot{\varphi}$ для второй ловушки: $\varphi = \Omega t$ и $\Omega_2 = \Omega$. Таким образом мы видим, что если вторая ловушка первоначально была изотропна в плоскости xy , то за счет влияния первой ловушки ее эффективный удерживающий потенциал (17) “деформируется” (с коэффициентами $\tilde{\omega}_{2x} = \sqrt{\omega_2^2 - \gamma\omega_{1x}^2}$ и $\tilde{\omega}_{2y} = \sqrt{\omega_2^2 - \gamma\omega_{1y}^2}$), становится анизотропным и начинает вращаться с такой же угловой скоростью, что и первая ловушка.

Найдем теперь коэффициент увлечения (взаимный момент инерции) J_{21} . Момент инерции газа, в соответствии с теорией линейного отклика, характеризует отклик системы на возмущение $-\Omega \hat{J}_z$ в гамильтониане системы и определяется отношением:

$$\Theta = \frac{\langle \hat{J}_z \rangle}{\Omega}, \quad (20)$$

между средним значением момента импульса $\langle \hat{J}_z \rangle$ и угловой скоростью вращения Ω . В работе [9] было показано, что при малых угловых скоростях Ω и при отсутствии надконденсатной части (то есть при $T = 0$) момент инерции ловушки равен

$$\Theta = \left[\frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \right]^2 \Theta_{\text{rig}}, \quad (21)$$

где $\Theta_{\text{rig}} = mN\langle x^2 + y^2 \rangle$ – значение момента инерции для твердого тела с параметрами ловушки ω_x, ω_y . Подставляя в эту формулу полученные выше значения эффективных частот удерживающего потенциала для второй ловушки, мы находим:

$$J_{21} = \gamma^2 \left[\frac{\omega_{1x}^2 - \omega_{1y}^2}{2\omega_2^2 - \gamma(\omega_{1x}^2 + \omega_{1y}^2)} \right]^2 \Theta_{\text{rig}}. \quad (22)$$

Для значений $\gamma \ll 1$ взаимный момент увлечения равен

$$J_{21} = \gamma^2 \frac{[\omega_{1x}^2 - \omega_{1y}^2]^2}{4\omega_2^4} \Theta_{\text{rig}}. \quad (23)$$

б) Если $\omega_{2x} \neq \omega_{2y}$, то есть верхняя (вторая) ловушка изначально была анизотропной, то $\beta \neq 0$. Это означает, что угловая скорость вращения верхней ловушки Ω_2 и параметры эффективного удерживающего потенциала $\tilde{\omega}_{2x}$ и $\tilde{\omega}_{2y}$ начинают зависеть от времени. Рассмотрим возможные значения параметра β :

б.1) При $\beta > \beta_0$ движение удерживающего потенциала второй ловушки носит колебательный характер. Значение величины β_0 находится из условия $\tilde{\omega}_{2x}(t) > \tilde{\omega}_{2y}(t)$. Таким образом, $\beta_0 = \sqrt{2}$. Угол поворота φ меняется в пределах

$$-\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\right) < \phi < \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\right). \quad (24)$$

Зависимость угла $\varphi(t)$ от времени показана на рис.1. Параметры эффективного удерживающего потенциала меняются в соответствии с формулами (18). Зави-

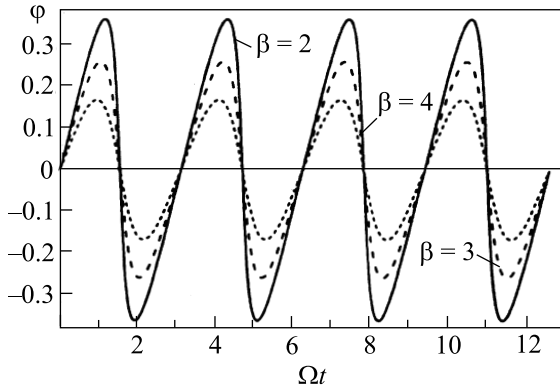


Рис.1. График зависимости угла поворота ловушки от времени при различных значениях $\beta = 2; 3; 4$

симость $\tilde{\omega}_{2x}(t)$ и $\tilde{\omega}_{2y}(t)$ от времени – периодическая с периодом вращения нижней ловушки $T = 2\pi/\Omega$ (см. рис.2).

б.2) При $0 < \beta < \beta_0$ движение носит сложный характер: эффективный удерживающий потенциал нижней ловушки вращается с переменной угловой скоростью $\Omega_2(t)$, причем его параметры $\tilde{\omega}_{2x}(t)$ и $\tilde{\omega}_{2y}(t)$ также колеблются (в противофазе) около своих средних значений с частотой Ω .

Таким образом, можно выделить четыре режима вращения удерживающего потенциала нижней ловушки:

- I. $\beta = 0$ (нижняя ловушка первоначально изотропна) – вращение атомов нижней ловушки происходит с постоянной угловой скоростью с не зависящими от времени параметрами.

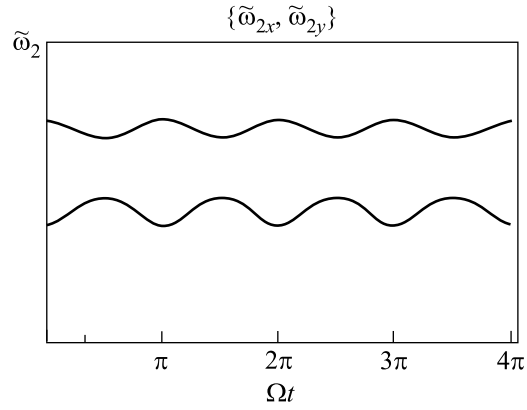


Рис.2. График зависимости эффективных частот удерживающего потенциала от времени при $\beta \sim 4$

II. $\beta \ll 1$ (слабая анизотропия нижней ловушки) – вращение атомов нижней ловушки происходит с угловой скоростью $\Omega_2(t) = \Omega[1 - \beta \cos(2\Omega t)]$.

III. $\beta \gg 1$ (сильная анизотропия нижней ловушки) – колебание атомов нижней ловушки происходит по закону $\varphi(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin(2\Omega t)}{\beta}$.

IV. Другие значения β – переходный режим.

Приведем теперь численные оценки коэффициента γ . Для примера⁴⁾ возьмем атомы Na^{23} , для которых длина s -рассеяния равна $a = 2.8$ нм. Для $\hbar\omega_0 = 7$ нК (что соответствует частоте удерживающего потенциала в плоскости xy $\omega_0 = 2\pi \times 145$ рад/с) и $\omega_z = 10^3\omega_0$ эффективная длина рассеяния $\tilde{a} = 0.041$. Константа ван-дер-ваальсовского взаимодействия для Na равна $\alpha_6 \approx 3000$ а.е., где 1 а.е. = $e^2 a_0^5 = 0.903 \cdot 10^{-60}$ эрг·см. Тогда коэффициент γ будет равен:

$$\gamma = 1, 2 \cdot 10^{-24} / D^4. \quad (25)$$

Для расстояний порядка $D \sim 10^{-5}$ см имеем $\gamma \sim 10^{-4}$.

Авторы признательны Российскому фонду фундаментальных исследований и INTAS за поддержку работы.

1. М. Н. Anderson et al., Science **269**, 198 (1995).
2. С. С. Bradley et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).

⁴⁾ Аналогичные эффекты возможны и для двух экситонных ловушек (соответствующий конфайнмент экситонов может быть осуществлен в системе квантовых точек, либо неоднородной деформацией, либо специальным профилем поверхности и т.п.)

3. K. B. Davis et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
4. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
5. Л. П. Питаевский, УФН **168**, 641 (1998).
6. Yu. E. Lozovik and V. I. Yudson, Physica **A3**, 493 (1978).
7. D. S. Petrov, M. Holzmann, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **84**, 2551 (2000).
8. B. P. van Zyl, R. K. Bhaduri, and J. Sigetich, cond-matt/0106410.
9. F. Zambelli and S. Stringari, Phys. Rev. **A63**, 033602 (2001).