Письма в ЖЭТФ, том 75, вып. 7, с. 425 – 427

Нулевые моды периодической системы соленоидов Ааронова–Бома

В. А. Гейлер[1], *Е. Н. Гришанов*[1]

Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, 430000 Саранск, Россия

Поступила в редакцию 21 февраля 2002 г.

Доказано существование бесконечно вырожденных нулевых мод у квантовомеханической двумерной заряженной частицы со спином 1/2, движущейся в поле бесконечной системы соленоидов Ааронова–Бома. Найдено условие появления таких мод и указан их явный вид.

PACS: 02.30.Tb, 72.15.Rn

Нетривиальная топологическая структура конфигурационного пространства квантовомеханической системы часто является причиной появления нулевых мод в ее энергетическом спектре (связанных состояний нулевой энергии). Обусловленные нулевыми модами квантовые флуктуации приводят к интересным эффектам в квантовой теории поля [1], в теории космических струн [2], в физике конденсированных сред (см. обширную библиографию в [3]). Для заряженной частицы со спином 1/2 в локализованном магнитном поле нулевые моды определены Аароновым[2] и Кашером[2] в известной работе [4]. Методы этой работы были распространены Дубровиным и Новиковым на случай периодических магнитных полей с регулярным векторным потенциалом, при этом был найден явный вид магнитно-блоховских состояний нулевой энергии [5]. Важно отметить, что анзатц Ааронова–Кашера применим и к конечной системе бесконечно тонких соленоидов Ааронова–Бома [2] [6]. При этом легко показать, что в случае одного соленоида нулевые моды отсутствуют, но при определенных значениях потоков могут появляться в конечной системе таких соленоидов (подробный анализ ситуации при наличии конечного числа особенностей типа полюсов конечного порядка в векторном потенциале магнитного поля дан в [7]). Ниже будет показано, что бесконечная система соленоидов Ааронова–Бома (даже при периодическом их расположении) при определенных значениях магнитного потока имеет бесконечно вырожденное основное сотояние $E_0 = 0$; при этом магнитное поле может иметь однородную компоненту. Система с конечной плотностью потоков Ааронова–Бома, разумеется, является термодинамическим пределом систем в ограниченных областях с данной плотностью потоков. Примером систем указанного вида может служить квазидвумерная система с колонкообразными дефектами в однородном магнитном поле, направленном по оси дефекта [8, 9].

Движение нерелятивистской заряженной частицы (заряд e) спина 1/2 в плоскости (xy), находящейся в направленном по оси z магнитном поле B, описывается гамильтонианом Паули[2]

$$H = \Pi^2 - 2eB\mathbf{s}_z\,, \tag{1}$$

где $\Pi = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ – векторный потенциал поля: $B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$. В двумерном случае гамильтониан (1) распадается на два скалярных оператора $H^{\pm}$, соответствующих замене в (1) матрицы $\mathbf{s}_z$ ее собственными числами $s = \pm 1/2$. Магнитное поле B будем считать состоящим из двух компонент: $B = B^0 + B^{AB}$, где поле B^0 однородно, а B^{AB} есть поле системы бесконечно тонких соленоидов Ааронова–Бома, проходящих через точки некоторого дискретного подмножества Λ плоскости $\mathbf{R}^2$. В этом случае конфигурационным пространством системы является многосвязная область $\mathbf{R}^2 \setminus \Lambda$, в которой напряженность поля Ааронова–Бома равна нулю. Для простоты будем считать, что каждый соленоид несет один и тот же поток Φ^{AB}, и обозначим через θ^{AB} число квантов этого потока: $\theta^{AB} = \Phi^{AB}/\Phi_0$, $\Phi_0 = hc/e$. Кроме того, ограничимся рассмотрением случая, когда Λ – решетка; экспериментально такая ситуация имеет место в гетероструктурах GaAs/AlGaAs с напыленной пленкой сверхпроводника типа II [10]. Тем не менее заметим, что некоторые приведенные ниже выводы при соответствующих изменениях в формулировках сохраняют силу и для более общего случая. Далее θ^0 обозначает число квантов потока поля B^0 через элементарную ячейку решетки Λ.

Точки плоскости нам будет удобно относить к комплексным координаты $z = x + iy$. Векторный потенциал $\mathbf{A}^{AB}$ для B^{AB} будем брать в виде $\mathbf{A}^{AB}(z, z^*) = (\mathrm{Im}\, M(z), \mathrm{Re}\, M(z))$, где $M(z)$ – мероморфная функция, имеющая только простые полюса, множество которых совпадает с Λ, причем все вы-

[1]e-mail: geyler@mrsu.ru, grishanovev@mrsu.ru

[2]Aharonov; Casher; Bohm; Pauli.

четы $M(z)$ равны $\Phi^{AB}/2\pi$. Действительно, в этом случае легко убедиться в справедливости равенства

$$\partial_x A_y^{AB} - \partial_y A_x^{AB} = \Phi^{AB} \sum_{\lambda\in\Lambda} \delta(z-\lambda).$$

Для B^0 используем векторный потенциал $\mathbf{A^0}(z,z^*) = (B/2)\,(\mathrm{Im}\ z^*,\ \mathrm{Re}\ z^*)$.

Ввиду сингулярности потенциала $\mathbf{A}^{AB}$ при $\Phi^{AB} \neq 0$ выражение (1) не определяет самосопряженный оператор однозначно; для корректного определения оператора H необходимо задание краевых условий в точках из Λ [11]. Чтобы избежать применения при этом громоздкого математического формализма операторной теории самосопряженных расширений, мы введем, следуя [4], операторы

$$P_\pm = \Pi_x \pm i\Pi_y\,. \tag{2}$$

В качестве области определения $\mathcal{D}_\pm$ оператора $P_\pm$ выберем область, максимально допустимую формальным выражением (2), а именно, считаем, что $\mathcal{D}_\pm$ состоит из всех функций f, принадлежащих гильбертову пространству $L^2(\mathbf{R}^2)$, для которых обобщенная функция $P_\pm f$, определенная в области $\mathbf{R}^2\setminus\Lambda$, снова принадлежит $L^2(\mathbf{R}^2)$. Тогда корректно определен самосопряженный оператор

$$H^\pm = P_\pm^* P_\pm\,. \tag{3}$$

Очевидно, на гладких функциях, носитель которых не содержит точек из Λ, оператор $H^\pm$ задается правой частью выражения (1). Заметим, что в случае векторного потенциала без особых точек определение (3) совпадает с общепринятым математическим определением оператора Шредингера [3)] с магнитным полем [12].

Рассмотрим вначале случай, когда $B^0 = 0$. Пусть $W(z)$ – целая функция, имеющая только простые нули, множество которых совпадает с Λ. Тогда можно взять $M(z) = \Phi^{AB} W'(z)(2\pi W(z))^{-1}$, при этом функция W удовлетворяет уравнению $\Delta\ \ln|W(z)| = 2\pi(\Phi^{AB})^{-1} B^{AB}(z,z^*)$. Тем самым получаем следующий вывод.

Основное состояние ψ гамильтониана $H^\pm$ имеет вид

$$\psi(x,y) = |W(x+iy)|^{\mp\theta^{AB}} \phi(x\pm iy), \tag{4}$$

где $\phi(z)$ – произвольная голоморфная в области $\mathbf{C}\setminus\Lambda$ функция. Возьмем в качестве $W(z)$ модифицированную σ-функцию Вейерштрасса[4)] $\tilde\sigma(z)$, введенную Переломовым [13]: $\tilde\sigma(z) = \exp(-\nu z^2)\sigma(z)$. Здесь $\sigma(z)$ – σ-функция Вейерштрасса решетки Λ, $\nu = i(4S)^{-1}(\eta_1\omega_2^* - \eta_2\omega_1^*)$, где ω_1, ω_2 – базис решетки Λ, $S = \mathrm{Im}(\omega_1^*\omega_2)$ – площадь ее элементарной ячейки, $\eta_j = (1/2)\zeta(\omega_j/2)$, $\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z)$ – ζ-функция Вейерштрасса. Заметим, что $\nu = 0$ для квадратной или гексагональной решетки Λ. Обозначим $\mu = \pi/2S$; в [13] доказано, что функция $\rho(z,z^*) = \exp(-2\,\mathrm{Re}\,(\nu z^2) - \mu z z^*)|\sigma(z)|^2$ Λ-периодическая и, кроме того, $|\tilde\sigma(z)| \le C\exp(\mu|z|^2)$ с некоторой константой C. Отсюда легко получить, что при $0 < \alpha < 1$ функция вида $|\tilde\sigma(z)|^{-2\alpha}p(z)$, где $p(z)$ – произвольный полином, интегрируема на всей плоскости $\mathbf{C}$. Пусть поток θ^{AB} не является целым числом. Обозначим через N целую часть числа θ^{AB}. Подставляя в (4) $\phi(z) = [\tilde\sigma(z)]^N p(z)$, получаем интегрируемую в квадрате функцию ψ. Тем самым гамильтониан H^+ имеет при любом нецелом потоке θ^{AB} нулевую моду, которая вырождена с бесконечной кратностью. Этот вывод справедлив и для H^-. Можно показать, что при целочисленном θ^{AB} оператор $H^\pm$ (как и в случае одного соленоида Ааронова–Бома) унитарно эквивалентен свободному гамильтониану $H_0 = -(\hbar^2/2m)\Delta$ и поэтому не имеет нулевых мод. Действительно, $H_0 = U^* H^\pm U$, где U – унитарный оператор умножения на функцию $\exp\left[\pm i\theta\mathrm{Arg}\,(W(z)|W(z)|^{-1})\right]$, которая при целом θ однозначна.

Перейдем теперь к общей ситуации $B^0 \neq 0$. Вначале отметим одно очевидное, но важное обстоятельство. При $B^0 = 0$ операторы $H^\pm$ переходят друг в друга при изменении направления поля B^{AB}, теперь же для этого нужно изменение знака у обеих компонент поля B. Тем самым при фиксированном B^0 симметрия между операторами $H^\pm$ отсутствует, что связано конечно же с выделением направления спина полем B^0. Далее, не умаляя общности, считаем $\theta^0 > 0$.

В рассматриваемом случае нулевая мода должна иметь вид

$$\psi(x,y) = \exp\left(\mp\frac{\pi\theta^0}{2S}\right)|W(x+iy)|^{\mp\theta^{AB}}\phi(x\pm iy)\,, \tag{5}$$

где $\phi(z)$ – по-прежнему голоморфная в области $\mathbf{C}\setminus\Lambda$ функция. Как и выше, возьмем $W(z) = \tilde\sigma(z)$. Оператор H^+ имеет теперь нулевую моду при любом θ^{AB}. Действительно, при θ^{AB} нецелом сохраняют силу предыдущие рассуждения, а при θ^{AB} целом, $\theta^{AB} = N$, берем $\phi(z) = [\tilde\sigma(z)]^N p(z)$, чтобы получить интегрируемую в квадрате функцию ψ. Очевидно, уровень $E_0 = 0$ при этом вырожден с бесконечной кратностью. Интересно отметить, что оператор H^+

[3)] Schrödinger.

[4)] Weierstrass.

имеет, таким образом, связное состояние и при нулевом суммарном потоке: $\theta^0 + \theta^{AB} = 0$. В случае оператора H^- в качестве функции $\phi(z^*)$ в (5) надо использовать модифицированную функцию Вейерштрасса для решетки Λ^* с базисом ω_2^*, ω_1^*, умножив ее на произвольный полином от z^*. При этом мы получаем следующее условие появления нулевой моды при нецелом θ^{AB}: $\theta^0 < 1 - \{\theta^{AB}\}$, где, как обычно, символ $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x.

Выводы. В отсутствие однородной компоненты магнитного поля периодическая система соленоидов Ааронова–Бома с нецелым потоком θ^{AB} локализует (с бесконечной кратностью вырождения) основное состояние $E_0 = 0$ не зависимо от направления спина электрона. Такое поведение спектра естественно в случае хаотического или квазипериодического расположения соленоидов (андерсоновская локализация). В случае же периодической системы потоков это явление аналогично локализации электрона на уровне Ландау в периодической системе точечных потенциалов, численно обнаруженной Андо [5] [14] и исследованной аналитически в [15–17] (см. также обзор [18]). В случае целого потока основное состояние остается делокализованным.

В присутствии однородного магнитного поля B^0 (с числом квантов потока через элементарную ячейку θ^0) электрон со спином, противоположным направлению B^0, остается локализованным (также с бесконечной кратностью) на уровне $E_0 = 0$ при любом потоке в соленоидах Ааронова–Бома. Если же спин электрона параллелен B^0, то периодическая система соленоидов Ааронова–Бома приводит к появлению бесконечно вырожденной нулевой моды при достаточно слабом B^0. Условие появления нулевых мод $\theta^0 < 1 - \{\theta^{AB}\}$ (поток θ^{AB} не целый), очевидно, периодично по потоку θ^{AB}.

Явный вид соответствующих мод дается формулами (4) или (5).

Авторы признательны В. А. Маргулису, обратившему наше внимание на статью [9]. Работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 01-02-16564), DFG (грант # 436 RUS 113/572) и INTAS (грант # 00-257).

1. K. Janssen, Phys. Rep. **273**, 1 (1996).
2. E. Witten, Nucl. Phys. **B249**, 557 (1985).
3. P.W. Brower, E. Racine, A. Furusaki et al., Prepr. cond-mat/0201580.
4. Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. **A19**, 2461 (1979).
5. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, ЖЭТФ **79**, 1006 (1980).
6. Y. Aharonov and A. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
7. M. Hirokawa and O. Ogurisu, J. Math. Phys. **42**, 3334 (2001).
8. Yu. I. Latyshev, O. Laborde, P. Monceau et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 919 (1997).
9. Ю. И. Латышев, УФН **169**, 924 (1999).
10. S. J. Bending, K. von Klitzing, and K. Ploog, Phys. Rev. Lett. **65**, 1060 (1990).
11. С. А. Воропаев, М. Бордаг, ЖЭТФ **105**, 241 (1994).
12. Х. Цикон, Р. Фрезе, В. Кирш, Б. Саймон, *Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии*, М.: Мир, 1990, с. 31. (H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon, *Schrödinger operators, with application to quantum mechanics and global geometry*, Springer–Verlag, Berlin etc., 1987, p. 30).
13. А. М. Переломов, ТМФ **6**, 213 (1971).
14. T. Ando, J. Phys. Soc. Japan **52**, 1740 (1983).
15. В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, ЖЭТФ **95**, 1134 (1989).
16. M. Ya. Azbel' and B. I. Halperin, Phys. Rev. **B52**, 14098 (1995).
17. Y. Avishai, M. Ya. Azbel', and S. A. Gredesckul, Phys. Rev. **B48**, 17280 (1993).
18. S. A. Gredeskul, M. Zusman, Y. Avishai et al., Phys. Reps. **288**, 223 (1997).

[5] Ando.