Письма в ЖЭТФ, том 75, вып. 8, с. 459 – 462 © 2002 г. 25 апреля

Нелинейные восприимчивости одноосного слабонеупорядоченного ферромагнетика в критической области

Д. В. Пахнин, А. И. Соколов[1], *Б. Н. Шалаев*[+]

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ", 197376 Санкт-Петербург, Россия

[+]*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, 194021 Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 11 марта 2002 г.

Для трехмерной слабонеупорядоченной модели Изинга найдены эффективная константа связи шестого порядка и нелинейные восприимчивости четвертого и шестого порядков в критической области. Эти величины, как оказалось, радикально (в 1.5–3 раза) отличаются от своих аналогов для чистого ферромагнетика, и их измерение может рассматриваться как способ идентификации примесного критического поведения.

PACS: 05.50.+q, 05.70.Jk, 75.10.Hk, 75.40.Cx

С середины 70-х годов критическая термодинамика трехмерных примесных систем интенсивно изучается теоретически и экспериментально. Успехи теории, такие как выяснение природы влияния примесей на критическое поведение, формулировка критерия Харриса, построение $\sqrt{\epsilon}$-разложения, а также вычисление критических индексов и отношений критических амплитуд в рамках теории возмущений [1 – 13], стимулировали дальнейшие исследования, развитие которых в последние годы приобрело характер бурного всплеска. Одной из причин ренессанса в данной области можно считать обнаружение того факта, что с ростом порядка перенормированной теории возмущений здесь не происходит стабилизации численных результатов для критических индексов и других универсальных физических величин. Эта особенность находится в очевидном противоречии с тем, что мы знаем о свойствах ренормгрупповых разложений для чистых систем, которые позволяют путем применения надлежащих пересуммировочных процедур находить универсальные характеристики с возрастающей от порядка к порядку точностью [14 – 22]. Скорее всего, указанная аномалия, проявляющаяся лишь в высоких – пятипетлевом и шестипетлевом – приближениях [23 – 26], отражает активно обсуждаемую сегодня несуммируемость по Борелю ренормгрупповых разложений для примесных систем (см., например, [27 – 29], а также недавние обзоры [30 – 32]).

Отсутствие сходимости итерационных схем, базирующихся на ренормгрупповой теории возмущений, не препятствует, однако, получению численных оценок для критических индексов, которые обладают вполне приемлемым уровнем точности. Мы имеем здесь в виду достаточно малый разброс результатов, даваемых различными приближениями, их нечувствительность к методу пересуммирования и, конечно, согласие предсказаний теории с данными физических и машинных экспериментов. Так, например, четырех-, пяти- и шестипетлевое приближения дают для критического индекса восприимчивости γ трехмерной примесной модели Изинга значения 1.326–1.321 [10, 11], 1.325 [25] и 1.330 [26], соответственно, причем вариации γ при переходе от одного метода пересуммирования к другому не превышают 0.01. Это наводит на мысль использовать метод теоретико-полевой ренормализационной группы для вычисления других универсальных критических характеристик трехмерных примесных систем.

Ниже будут найдены нелинейные восприимчивости четвертого (χ_4) и шестого (χ_6) порядков, а также эффективная константа связи v_6 для трехмерного слабонеупорядоченного изинговского ферромагнетика в критической области. Подобно линейной восприимчивости χ и другим равновесным величинам, они при $T \to T_c$ принимают универсальные асимптотические значения, которые с высокой точностью могут быть измерены в современном эксперименте.

Свободная энергия одноосного ферромагнетика во внешнем магнитном поле H как функция намагниченности M может быть представлена в виде

$$F(M,m) = F(0,m) + \frac{1}{2}m^{2-\eta}M^2 + m^{1-2\eta}v_4M^4 + + m^{-3\eta}v_6M^6 + \ldots - HM, \qquad (1)$$

[1] e-mail: ais@sokol.usr.etu.spb.ru

где m – обратный радиус корреляции, η – индекс Фишера, а v_4 и v_6 – эффективные константы связи, принимающие в точке Кюри универсальные критические значения. Исходя из разложения (1), нетрудно выразить нелинейные восприимчивости χ_4 и χ_6 через χ, v_4 и v_6:

$$\chi_4 = \left.\frac{\partial^3 M}{\partial H^3}\right|_{H=0} = -24\chi^2 m^{-3} v_4,$$
$$\chi_6 = \left.\frac{\partial^5 M}{\partial H^5}\right|_{H=0} = 720\chi^3 m^{-6}(8v_4^2 - v_6). \tag{2}$$

Таким образом, нахождение нелинейных восприимчивостей в критической области сводится к вычислению универсальных асимптотических значений v_4 и v_6.

Для слабонеупорядоченных систем термодинамические величины определяются путем усреднения по случайным конфигурациям примесей, которое проще всего выполняется с помощью метода реплик. В этом методе в качестве исходного берется флуктуационный гамильтониан n-векторной кубической модели

$$H = \int d^3x \left[\frac{m_0^2\varphi_\alpha^2 + (\nabla\varphi_\alpha)^2}{2} + u_4^{(0)}\varphi_\alpha^2\varphi_\beta^2 + v_4^{(0)}\varphi_\alpha^4\right], \tag{3}$$

который в пределе $n \to 0$ воспроизводит критическое поведение примесной модели Изинга. Это поведение управляется примесной фиксированной точкой уравнений ренормализационной группы. Данная точка представляет собой устойчивый узел на плоскости (u_4, v_4), и ее координаты известны сегодня в рекордно высоком – шестипетлевом – приближении [26]. Существенно, что случаю ненулевого внешнего магнитного поля отвечает n-компонентная кубическая модель в однородном поле, направленном вдоль главной диагонали гиперкуба. Можно показать, что для решения, не нарушающего репличную симметрию, в пределе $n \to 0$ константа связи u_4 выпадает из уравнения состояния. С физической точки зрения это очень важно, ибо "неправильный" знак u_4 не приводит в данном случае к неустойчивости эффективного гамильтониана.

Итак, в точке Кюри эффективная константа связи четвертого порядка, фигурирующая в разложении (1), равна координате v_4^* примесной фиксированной точки. Следовательно, именно v_4^* определяет асимптотику χ_4 при $T \to T_c$. Сложнее обстоит дело с нелинейной восприимчивостью χ_6. Нахождение ее критической асимптотики предполагает вычисление эффективных констант связи u_6, q_6 и v_6 для модели (3). Эти константы играют роль коэффициентов при инвариантах $M_\alpha^2 M_\beta^2 M_\gamma^2$, $M_\alpha^4 M_\beta^2$ и M_α^6 в разложении свободной энергии кубической модели. Недавно u_6, q_6 и v_6 были найдены в виде рядов перенормированной теории возмущений в четырехпетлевом приближении [33]. Известно, что для $O(n)$-симметричных систем ряды такой длины позволяют вычислять универсальные значения константы связи шестого порядка с точностью не хуже 1% [19, 22]. Поскольку в выражение для χ_6 входит лишь одна из трех констант связи – v_6, мы приведем здесь ренормгрупповое разложение только для нее. В пределе $n \to 0$ оно имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{v_6}{v_4^2} = \frac{9}{\pi}\big(&2u_4 + v_4 - 2.9001567u_4^2 - 3.1830989u_4v_4 - \\ &- 0.9549296v_4^2 + 5.579725u_4^3 + 10.03487u_4^2v_4 + \\ &+ 6.222000u_4v_4^2 + 1.389963v_4^3 - 12.5233u_4^4 - \\ &- 31.7631u_4^3v_4 - 30.6484u_4^2v_4^2 - 13.8874u_4v_4^3 - \\ &- 2.50173v_4^4\big).\end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что заряды u_4 и v_4 отличаются множителем $\pi/4$ от своих аналогов u и v, использовавшихся в работе [33].

Ряды типа (4) являются, как известно, асимптотическими, но они позволяют получать надежные количественные результаты при условии применения надлежащих методов пересуммирования. Метод, к которому мы здесь обратимся, состоит в следующем [11]. Разложение (4) превращается в сходящийся ряд с помощью обобщенного преобразования Бореля-Леруа

$$f(u,v) = \sum_{ij} c_{ij}u^iv^j = \int_0^\infty e^{-t}t^bF(ut,vt)dt,$$
$$F(x,y) = \sum_{ij}\frac{c_{ij}x^iy^j}{(i+j+b)!}, \tag{5}$$

а затем по борелевскому образу исходной функции строится вспомогательный ряд:

$$\tilde{F}(x,y,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\sum_{l=0}^{n}\frac{c_{l,n-l}x^ly^{n-l}}{n!} \tag{6}$$

с коэффициентами, являющимися однородными полиномами от переменных u_4 и v_4. Для выполнения аналитического продолжения за пределы круга сходимости используются аппроксиманты Паде $[L/M]$ по переменной λ, которая на заключительном этапе полагается равной 1. Описанная пересуммировочная процедура сохраняет все точные симметрийные свойства исходных разложений [34]

b		0	1	2	3	5	10	15	20
$u_4^* = -0.50$,	[2/2]	2.056	–	–	–	2.161	2.120	2.109	2.103
$v_4^* = 1.53$	[3/1]	2.319	2.255	2.216	2.190	2.156	2.117	2.100	2.090
(6-loop)	[2/1]	1.960	2.033	2.072	2.095	2.123	2.153	2.165	2.172
$u_4^* = -0.53$,	[2/2]	2.062	–	–	–	–	2.150	2.135	2.127
$v_4^* = 1.57$	[3/1]	2.364	2.296	2.255	2.226	2.191	2.149	2.131	2.120
(6-loop)	[2/1]	1.957	2.034	2.074	2.099	2.129	2.160	2.172	2.180
$u_4^* = -0.56$,	[2/2]	1.867	–	–	–	–	1.995	1.973	1.963
$v_4^* = 1.58$	[3/1]	2.188	2.125	2.087	2.061	2.028	1.990	1.973	1.963
(5-loop)	[2/1]	1.762	1.834	1.871	1.895	1.922	1.951	1.963	1.969

и обеспечивает, при наличии борелевской суммируемости ренормгрупповых рядов, быструю сходимость итерационного процесса.

Поскольку выражение в скобках (4) представляет собой полином четвертого порядка, мы можем построить четыре различных аппроксиманты Паде: [3/1], [2/2], [1/3] и [0/4]. Известно, что наилучшими аппроксимирующими свойствами обладают диагональные аппроксиманты ($L = M$) или близкие к ним. С ростом степени знаменателя M, однако, растет число полюсов аппроксиманты в комплексной плоскости, которые, попав на положительную вещественную полуось или оказавшись вблизи нее, могут сделать аппроксиманту непригодной для суммирования ряда. Это вынуждает нас ограничиться при пересуммировании разложения (4) лишь аппроксимантами [3/1] и [2/2]. Кроме того, наш анализ включает и аппроксиманту [2/1], что отвечает фактически использованию трехпетлевого приближения. Делается это для того, чтобы выяснить, насколько чувствительны численные результаты к порядку приближения, и получить дополнительную информацию для оптимизации процедуры пересуммирования путем подбора свободного параметра b в преобразовании Бореля-Леруа.

Результаты наших расчетов приведены в таблице, где эффективная константа связи v_6, найденная в примесной фиксированной точке с помощью трех упомянутых выше аппроксимант Паде, представлена как функция параметра b. Поскольку сами координаты примесной фиксированной точки u_4^* и v_4^* известны с ограниченной точностью, мы рассчитали универсальное критическое значение v_6 для трех наборов u_4^* и v_4^*. Первые два из них ($u_4^* = -0.50, v_4^* = 1.53$ и $u_4^* = -0.53, v_4^* = 1.57$) получены в шестипетлевом приближении с применением двух разных стратегий пересуммирования [26], последний ($u_4^* = -0.56, v_4^* = 1.58$) найден на основе пятипетлевых разложений, пересуммированных методом Паде-Бореля-Леруа [25]. Пустые ячейки в таблице означают, что при соответствующих значениях b аппроксиманта Паде [2/2] имеет "опасные" полюса.

Как видно из таблицы, численные значения v_6, получаемые с помощью трех рабочих аппроксимант Паде, слабо зависят от параметра b, и для каждого набора u_4^*, v_4^* легко фиксируется оптимальное значение b, при котором все три аппроксиманты дают совпадающие или максимально близкие результаты. Это говорит о высокой эффективности выбранной нами техники пересуммирования. Анализируя данные таблицы, нетрудно установить, что трем вариантам координат примесной фиксированной точки отвечают соответственно оценки $v_6 = 2.14$, $v_6 = 2.15$ и $v_6 = 1.96$. Поскольку координаты u_4^*, v_4^*, найденные в шестипетлевом приближении, следует рассматривать как наиболее достоверные, а обработка расходящегося ряда (4) вряд ли может обеспечить точность выше двух десятичных разрядов, в качестве окончательного результата наших расчетов мы принимаем

$$v_6 = 2.1 \pm 0.2. \tag{7}$$

Выбранная "вилка" погрешностей является, как легко видеть, весьма консервативной, так что истинное асимптотическое значение v_6 наверняка лежит внутри ограничиваемого формулой (7) интервала.

Интересно сравнить универсальное критическое значение v_6 для примесной модели Изинга с ее аналогом для чистой (бездефектной) системы. Реально фактором, характеризующим вклад эффективной константы связи v_6 в уравнение состояния, является отношение v_6/v_4^2. Взяв в качестве координаты примесной фиксированной точки усредненную величину $v_4^* = 1.55$, для неупорядоченной модели Изинга в критической точке получим $v_6/v_4^2 = 0.87$. Для чистого же одноосного ферромагнетика $v_6/v_4^2 = 1.64$-1.65 [17, 18, 35–38]. Таким образом, примеси уменьшают данное отношение почти вдвое. Поскольку это отношение фигурирует в уравнении состояния и, следовательно, доступно экспериментальному изучению, измерение v_6/v_4^2 может быть использовано для идентификации примесного критического поведения.

Столь же существенно различаются в критической области и нелинейные восприимчивости примесного и чистого изинговских ферромагнетиков. Для трехмерной модели Изинга $v_4^* = 0.99$ [14, 15, 17, 18]. Это значит, что, согласно первой формуле (2), универсальная комбинация $\chi_4\chi^{-2}m^3$ для примесного ферромагнетика на 55–60% больше, чем для чистого. Еще сильнее выражено отличие нелинейных восприимчивостей шестого порядка. Если для чистого одноосного ферромагнетика, как следует из (2), $\chi_6\chi^{-3}m^6 = 4.5 \cdot 10^3$, то в слабонеупорядоченной системе $\chi_6\chi^{-3}m^6 = 12.3 \cdot 10^3$. Это почти трехкратное изменение $\chi_6\chi^{-3}m^6$ под действием примесей без сомнения может быть обнаружено экспериментально.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 01-02-17048 и # 01-02-17794) и Министерства образования РФ (грант # E00-3.2-132). А. И. С. и Д. В. П. благодарны также Международному научному фонду и Администрации Санкт-Петербурга за финансовую поддержку в рамках индивидуальных грантов # p2001-90 и # s2001-1002.

---

1. A. B. Harris and T. C. Lubensky, Phys. Rev. Lett. **33**, 1540 (1974).
2. A. B. Harris, J. Phys. **C7**, 1671 (1974).
3. T. C. Lubensky, Phys. Rev. **B9**, 3573 (1975).
4. Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **68**, 1960 (1975).
5. Б. Н. Шалаев, ЖЭТФ **73**, 2301 (1977).
6. C. Jayaprakash and H. J. Katz, Phys. Rev. **B16**, 3987 (1977).
7. А. И. Соколов, Б. Н. Шалаев, ФТТ **23**, 2058 (1981).
8. G. Jug, Phys. Rev. **B27**, 609 (1983).
9. И. О. Майер, А. И. Соколов, ФТТ **26**, 3454 (1984).
10. I. O. Mayer, A. I. Sokolov, and B. N. Shalaev, Ferroelectrics **95**, 93 (1989).
11. I. O. Mayer, J. Phys. **A22**, 2815 (1989).
12. Н. А. Шпот, ЖЭТФ **98**, 1762 (1990).
13. C. Bervillier and M. Shpot, Phys. Rev. **B46**, 955 (1992).
14. G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, and D. I. Meiron, Phys. Rev. **B17**, 1365 (1978).
15. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. **B21**, 3976 (1980).
16. S. A. Antonenko and A. I. Sokolov, Phys. Rev. **E51**, 1894 (1995).
17. R. Guida and J. Zinn-Justin, Nucl. Phys. **B489**, 626 (1997).
18. R. Guida and J. Zinn-Justin, J. Phys. **A31**, 8103 (1998).
19. А. И. Соколов, ФТТ **40**, 1284 (1998).
20. H. Kleinert, Phys. Rev. **D57**, 2264 (1998).
21. H. Kleinert, Phys. Rev. **D60**, 085001 (1999).
22. A. I. Sokolov, E. V. Orlov, V. A. Ul'kov, and S. S. Kashtanov, Phys. Rev. **E60**, 1344 (1999).
23. B. N. Shalaev, S. A. Antonenko, and A. I. Sokolov, Phys. Lett. **A230** 105 (1997).
24. R. Folk, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, Phys. Rev. **B61**, 15114 (2000).
25. D. V. Pakhnin and A. I. Sokolov, Phys. Rev. **B61**, 15130 (2000); Письма в ЖЭТФ **71**, 600 (2000) [JETP Lett. **71**, 412 (2000)].
26. A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rev. **B62**, 6393 (2000).
27. A. J. Bray, T. McCarthy, M. A. Moore et al., Phys. Rev. **B36**, 2212 (1987).
28. A. J. McKane, Phys. Rev. **B49**, 12003 (1994).
29. G. Alvarez, V. Martin-Mayor, and J. Ruiz-Lorenzo, J. Phys. **A33**, 841 (2000).
30. A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rep., in press; cond-mat/0012164 (2000).
31. R. Folk, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, cond-mat/0106468 (2001).
32. Yu. Holovatch, V. Blavats'ka, M. Dudka et al., cond-mat/0111158 (2001).
33. D. V. Pakhnin and A. I. Sokolov, Phys. Rev. **B64**, 094407 (2001).
34. S. A. Antonenko and A. I. Sokolov, Phys. Rev. **B49**, 15901 (1994).
35. A. I. Sokolov, E. V. Orlov, and V. A. Ul'kov, Phys. Lett. **A227**, 255 (1997).
36. P. Butera and M. Comi, Phys. Rev. **E55**, 6391 (1997).
37. A. Pelissetto and E. Vicari, Nucl. Phys. **B522**, 605 (1998).
38. M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi et al., Phys. Rev. **E60**, 3526 (1999).