

Бильярдная проблема в симметричных координатах

С. В. Найдёнов¹⁾, В. В. Яновский, А. В. Тур*

Институт монокристаллов НАН Украины, 61001 Харьков, Украина

* Center d'Etude Spatiale Des Rayonnements, C.N.R.S.-U.P.S., 31028 Toulouse, CEDEX 4, France

Поступила в редакцию 12 ноября 2001 г.

После переработки 19 февраля 2002 г.

Бильярды являются важной геометрической моделью в нелинейной физике. Предложено динамическое описание бильярда в симметричных координатах. Установлена топологическая структура симметричного фазового пространства и геометрические критерии стохастичности бильярдных систем.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Pq, 05.45.Mt

Бильярды являются простой, но важной физической моделью. В статистической физике они привлекались для обоснования гипотезы молекулярного хаоса [1], в хаотической динамике – для демонстрации эргодичности и перемешивания в динамических системах с небольшим числом степеней свободы [2–5], в постмодернистской квантовой механике – для развития принципа (квазиклассического) соответствия [6, 7]. Важны и практические приложения бильярдных [8–10] для физики резонаторов, волноводов, ловушек, детекторов и др.

Природа бильярда геометрическая. В классической постановке ему соответствует свободное движение (с единичной скоростью $v = |\mathbf{v}| = 1$) точечной частицы внутри области Ω с упругим отражением от ее границы $\partial\Omega$. От геометрии $\partial\Omega$ зависит разнообразие динамических режимов бильярда, то есть поведение его траекторий. Типичной будет смешанная регулярная и хаотическая динамика. Среди динамических систем бильярд стал парадигмой [11] детерминированного хаоса. Большинство задач, сводящихся к бильярдам, требует описания динамики траекторий. Геометрические траектории внутри Ω пересекаются друг с другом и могут быть крайне запутанными. Поэтому переходят к описанию в фазовом пространстве с непересекающимися фазовыми траекториями. При этом традиционно бильярд связывается с консервативным отображением [12], полученным “сечением” исходного потока [13] в моменты последовательных отражений от границы $\partial\Omega$. Фазовое состояние этой гамильтоновой системы задается парой канонических переменных: координатой и импульсом. Обычно это – локальные биркгофовы коор-

динаты: натуральный параметр l на $\partial\Omega$ [14] и угол падения θ в точке отражения.

В данной работе для описания бильярда предлагается использовать другие, более равноправные (симметричные), но нелокальные координаты. С ними связан выбор нового симметричного фазового пространства Σ . Симметричные координаты имеют проективную природу, а произвольный бильярд в них с самого начала сводится к дискретной динамической системе – отображению специального вида. Вспомогательных (с особенностями) сечений Пуанкаре для бильярдного потока здесь не требуется. Топология Σ непосредственно зависит от геометрии $\partial\Omega$, что прямо влияет на стохастичность бильярда.

Построим симметричное фазовое пространство Σ . Для этого не будем явно следить за динамикой геометрических траекторий между их последовательными соударениями с границей $\partial\Omega$. При введении Σ конкретный вид траекторий между отражениями (не обязательно прямолинейных лучей, если движение происходит на криволинейных поверхностях или во внешнем поле) существенной роли не играет. Динамика бильярда в целом определяется лишь последовательностью отражений от $\partial\Omega$ и выбором начального состояния. Состояние системы зададим парой координат s_1 и s_2 последовательных отражений в точках $\mathbf{r}(s_1)$ и $\mathbf{r}(s_2)$, где $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}|_{\partial\Omega}$ – некоторая параметризация [14] границы; $s \in M$. Многообразие M определяется топологией $\partial\Omega$. Для одномерной замкнутой и односвязной границы $M = S^1$ (окружность). Геометрически фазовая точка \mathbf{s} отождествляется с отдельным звеном (лучом) бильярдной траектории

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \Sigma = M \times M; M \sim \partial\Omega. \quad (1)$$

Для планарного бильярда – это луч между отражениями. Переход от точек (отражения) к лучам (па-

¹⁾e-mail: naydenov@isc.kharkov.com

дающему и отраженному) – полезная в приложениях [15] операция проективной двойственности. Топология Σ двумерного бильярда – это топология тора $T^2 = S^1 \times S^1$ (нет края, $\partial T^2 = \emptyset$). В биркгофовых координатах фазовым пространством выступает боковая поверхность цилиндра $\Pi = S^1 \times [-\pi/2, \pi/2]$ (с краем $\theta = \pm\pi/2$). Для выпуклого многомерного бильярда $\Sigma = S^n \times S^n$ и т.д. В новых координатах состояние определяется нелокальным образом, так как относится не к одной и той же, а к разным точкам отражения. Именно эта нелокальность позволяет “симметризовать” описание бильярда.

Вдоль одной и той же бильярдной траектории можно двигаться в противоположных направлениях (обратимость времени). Поэтому вне зависимости от выбора направления произвольного луча с координатами $\mathbf{s}^t = (s_1, s_2)$ или переставленными $\mathbf{s}^{-t} = (s_2, s_1)$ в результате прямых (и обратных) отражений будем иметь одну и ту же бильярдную траекторию. Следовательно, введенные координаты являются симметричными. Наряду с фазовой траекторией с начальной точкой (s_{10}, s_{20}) , в Σ существует симметричная траектория с начальной точкой (s_{20}, s_{10}) . Это приводит к симметрии произвольных функций в Σ , в том числе, индикаторов $\chi_U(\mathbf{s})$ ($U \subset \Sigma$), описывающих “пучки” траекторий и плотности любой меры μ

$$\chi_U(s_1, s_2) = \chi_U(s_2, s_1); \quad \mu(s_1, s_2) = \mu(s_2, s_1). \quad (2)$$

Линией симметрии выступает диагональ фазового пространства, $\Delta = \{(s_1, s_2) \in \Sigma \mid s_1 = s_2\}$. Симметрия (2) означает, что бильярд как динамическая система в Σ относится к обратимым системам, обобщающим гамильтоновы [16]. В симметричных координатах описание бильярда приобретает ковариантный характер. При любых геометрических заменах $\mathbf{s}' = z(\mathbf{s})$ систем координат или репараметризации $\partial\Omega$ динамика остается инвариантной, так как они относятся к обоим переменным s_1 и s_2 симметричного фазового пространства.

Построим динамическую систему, соответствующую бильярду в симметричных координатах. Падающий луч с координатами (s_1, s_2) переходит в отраженный (\bar{s}_1, \bar{s}_2) . Точка отражения s_2 – в точку вылета: $\bar{s}_1 = s_2$. Точка $\bar{s}_2 = f(s_1, s_2)$ определяется законом отражения. Обычно это – закон упругого (зеркального) отражения. Угол падения равен углу отражения или $\theta = \pi - \theta$ для ориентированных углов. Существует и аномальный закон, когда изменяется знак всего импульса, а не только его нормальной составляющей. После отражения частица превращается в античастицу. Это – явление отражения Андреева [17]. Для него $\bar{s}_2 = f_A(s_1, s_2) =$

$= s_1$. В дальнейшем будут охвачены оба типа – обычных и андреевских [18] бильярдных. Для андреевского отражения массивных частиц (сверхпроводящих электронов) физическим вакуумом, рождающим пары частиц и античастиц, выступает макроскопический конденсат. Аномальное отражение фотонов можно осуществить, используя нелинейный эффект фазового сопряжения [19]. Последовательные отражения $(s_1, s_2) \rightarrow (\bar{s}_1, \bar{s}_2) \rightarrow \dots$ соответствуют итерациям бильярдного отображения

$$B := \{\bar{s}_1 = s_2; \bar{s}_2 = f(s_1, s_2)\}. \quad (3)$$

Фазовые траектории в Σ соответствуют геометрическим траекториям при естественном проецировании $\Sigma \rightarrow \partial\Omega$. Каждый физический образ (луч, траектория, пучок и др.) соответствует определенному элементу в Σ (фазовая точка, орбита, область или кривая). Хаотическая динамика и статистические свойства бильярдных подчинены особенностям специального класса *бильярдных отображений* (3). Эти особенности связаны со свойствами функции f .

Повторное отражение с использованием в качестве падающего первоначально отраженного луча возвращает нас к исходному лучу. Поэтому требуется $f(f(s_1, s_2), s_2) = s_1$. Это свойство назовем *бильярдной инволюцией*, то есть $f \circ f = id$ (id – тождественная функция), считая f однопараметрическим (зависящим от точки отражения) семейством, $f(s_1, s_2) = f_{s_2}(s_1)$. Если движение происходит в магнитном или любом другом соленоидальном поле с напряженностью $\mathbf{H}^*(t) \equiv \mathbf{H}(-t) \neq \mathbf{H}(t)$, то обратимость будет восстановлена при более общем условии

$$f(f(s_1, s_2; \mathbf{H}), s_2; \mathbf{H}^*) = s_1 \Leftrightarrow f(H^*) \circ f(H) = id. \quad (4)$$

В потенциальном поле изменяется скорость частицы и f зависит от времени t . Свойство инволютивности:

$$f(f(s_1, t_1; s_2, t_2), t_2 + \tau^*; s_2, t_1 + \tau) = s_1, \quad (5)$$

где

$$\tau = t_2 - t_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d\mathbf{r}}{v(\mathbf{r})} \quad \text{и} \quad \tau^* = \int_{s_2}^f \frac{d\mathbf{r}}{v(\mathbf{r})}.$$

В частности, для бризеров – бильярдных с возмущаемой границей $\partial\Omega = \partial\Omega(t)$ [11, 20], движение остается прямолинейным. В них

$$\tau = \frac{|\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(s_2)|}{v(s_1)}; \quad \tau^* = \frac{|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(s_2)|}{v(s_2)}.$$

При этом $\mathbf{r}(s_1) = \mathbf{r}(t - \tau)$, $\mathbf{r}(s_2) = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(t + \tau^*)$ и $v(s_1) = v(t - \tau)$, $v(s_2) = v(t)$. “Дрожание” границы $\mathbf{r}(t)$ задано, скорость $v(t^-)$ (здесь $t^- = t - 0$) луча

в момент перед отражением известна. Обращая по теореме о неявной функции выражения для τ и τ^* , получим локальные зависимости $t_2 = t(\tau)$ и $\tau^* = \varphi(t_2) = \tau^*(\tau)$. В результате инволюция брызера зависит только от сдвига τ (времени между столкновениями), $f(s_1, t_1; s_2, t_2) = f(s_1, s_2; \tau)$. Это – биллиард с “запаздыванием”.

Конкретный вид f определяется формой $\partial\Omega$ и характером движения внутри Ω . Из условия упругого отражения $\cot \theta = -\cot \theta$ в декартовых координатах $\mathbf{r} = (x, y)$ и $\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = (n_x, n_y)$ (нормаль) выводится

$$\xi(f, s_2) = R(\xi(s_1, s_2), s_2) = \frac{a(s)\xi + b(s)}{b(s)\xi - a(s)}, \quad (6)$$

где

$$\xi(s_1, s_2) = \frac{x(s_1) - x(s_2)}{y(s_1) - y(s_2)};$$

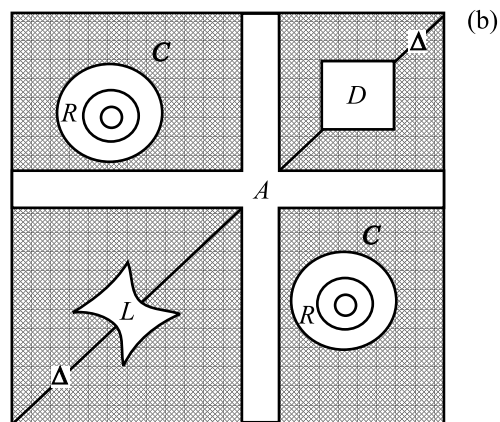
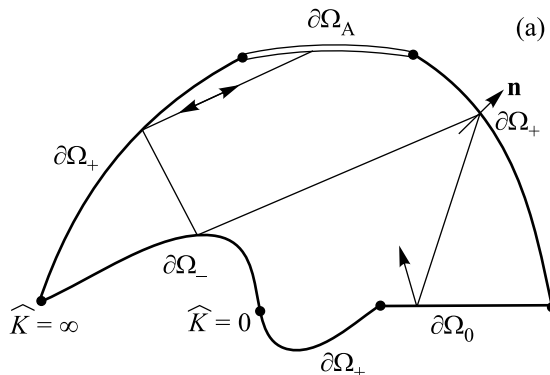
R – дробно-рациональное проективное преобразование; $a(s) = n_x^2(s) - n_y^2(s)$ и $b(s) = 2n_x(s)n_y(s)$. Примеры таких инволюций получены в [21]. Их можно использовать для описания динамики конкретных биллиардов.

Из выражения (6) следует, что существует такая замена переменных, что в новых координатах инволюция становится дробно-рациональной. Геометрически это означает сводимость биллиарда к локальным проективным преобразованиям. Проективность инволюции – следствие геометрической природы биллиарда.

В симметричных координатах структура фазового пространства наиболее полно отражает особенности геометрии биллиарда. Основными элементами этой структуры являются регулярная R , хаотическая C компоненты и сингулярности (особенности) P : диагональ Δ , лакуны L , дискриминанты D и андреевские зоны A ,

$$\Sigma = \Sigma_R \oplus \Sigma_C \oplus \Sigma_P; \quad \Sigma_P = \Delta \oplus L \oplus D \oplus A. \quad (7)$$

Эта структура соответствует биллиарду с типичной границей (см. рисунок). В регулярных областях $\Sigma_R \subset \Sigma$ имеем квазипериодическое движение [15] на инвариантных торах, для планарного биллиарда – на инвариантных замкнутых кривых. В хаотической зоне Σ_C происходит перемешивание экспоненциально неустойчивых (к возмущениям начальных условий) фазовых траекторий и движение эргодично. Сингулярности как топологические препятствия разделяют фазовый поток. Диагональ Δ содержит все неподвижные точки биллиардного отображения (3), $\Delta \supseteq \text{Fix}(B)$. Это следует из свойства $f(s, s) = s$, означающего совпадение падающего и отраженного



(а) Геометрия типичного биллиарда с границей, содержащей выпуклые, вогнутые, прямолинейные и андреевские участки. (б) Качественная структура симметричного фазового пространства приведенного планарного биллиарда, содержащая хаотическую C и регулярные зоны R , диагональ Δ , лакуны L , дискриминанты D и андреевские зоны A (показана схематически на плоской “развертке” $I \times I$ тора $\Sigma = T^2$)

лучей для касательного распространения вдоль $\partial\Omega$. Очевидно, что касательные лучи распространяться внутри Ω не могут. Диагональ разделяет симметричные фазовые траектории, соответствующие движению в противоположных направлениях.

Внутри андреевских зон A симметричные траектории сшиваются друг с другом (в симметричных относительно Δ точках) и происходит локализация обращенных во времени траекторий. Топологически сшивка означает склейку определенных областей фазового пространства и не относится к непрерывным перестройкам. Это соответствует появлению щели в спектре возбуждений. Добавим, что андреевские зоны могут накладываться на другие компоненты Σ , изменяя их топологию. (Например, пересечение A и Σ_R приводит к разрыву регулярной квазипериодической кривой, так как на участке аномального отражения не может быть более двух точек отражения

для одной и той же билиардной траектории.) Симметричное фазовое пространство особенно удобно для описания андреевских билиардов смешанного типа с обычным и аномальным отражением (см. рисунок). Если для обычного отражения ориентация сохраняется (якобиан $J(\mathbf{s}) = -f'_{s_1}(s_1, s_2)$ отображения (3) с инволюцией (6) положителен, $J_N > 0$), то для андреевского она изменяется ($J_A = -1$). В гамильтоновых координатах $J_{N,A} = \pm 1$. Канонические преобразования должны сохранять якобиан. Поэтому отражение везде должно быть одного и того же типа. В симметричном подходе требуется только обратимость, якобиан может изменяться. Адекватным будет описание билиарда любого типа.

Лакуны соответствуют участкам геометрической тени. Это – области классически запрещенных лучей, которые задаются своими точками пересечения с $\partial\Omega$, но расположены снаружи Ω . Появляются лакуны в билиардах с вогнутой $\partial\Omega_-$ (см. рисунок) или точками возврата (касательные лучи проходят внутри Ω). Для билиардов с кривизной – это участки с ориентированной [14] кривизной $\hat{K} < 0$ (при выборе внешней нормали) или особые точки с $\hat{K} = -\infty$. Дискриминанты – это области вырождения. Они заполнены “слипшимися” друг с другом лучами, которые целиком или частично лежат на прямолинейных участках $\partial\Omega_0$ нулевой кривизны $\hat{K} = 0$, а также лучами, попадающими в угловые точки (касательные вне Ω), где $\hat{K} = +\infty$. Дальнейшее распространение таких лучей не определено, и их динамика считается прерванной. Отметим, что фазовая мера лучей, заканчивающихся в изолированных особых точках $\partial\Omega$, равна нулю. Мера лакун и дискриминант пропорциональна $\mu(L) \propto |\partial\Omega_-|^2$ и $\mu(D) \propto |\partial\Omega_0|^2$ (здесь $|\partial\Omega|$ – длина кривой). Число лакун равно полному числу вогнутых компонент и точек возврата, а дискриминант – числу прямолинейных отрезков и угловых точек. Границы сингулярных областей определяются из геометрических уравнений для точек $(s_1, s_2) \in \Sigma$:

$$\partial L := \begin{cases} (\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(s_3), \mathbf{n}(s_3)) = 0 \\ (\mathbf{r}(s_2) - \mathbf{r}(s_3), \mathbf{n}(s_3)) = 0 \end{cases}; \hat{K}(s_3) < 0; \quad (8)$$

$$\partial D := (\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(s_2), \mathbf{n}(s_3)) = 0; \hat{K}(s_3) = 0; \quad (9)$$

$$\partial A := \mathbf{r}(s_2) \in \partial\Omega_a; \mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(s_2) \in \Omega, \quad (10)$$

где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение. Условия (8)–(9) определяют пучки касательных лучей к $\partial\Omega_-$ и $\partial\Omega_0$. Считая $\mu(\Sigma) = 1$, получим $\mu(\Sigma_P) = 1 - \mu(\Sigma_R) - \mu(\Sigma_C)$. Фазовый объем компонент можно вычислять в евклидовой метрике на развертке $I \times I$ тора (см. рисунок).

Границы лакун (8) и дискриминант (9) определяются сугубо геометрически. Поэтому их фазовый размер $\mu_{L,D}$ зависит только от формы $\partial\Omega$ и при однородном “раздутии” билиарда не изменяется.

Подчеркнем, лакуны и дискриминанты – атрибут симметричного фазового пространства. Эти элементы неразличимы и полностью отсутствуют в фазовом пространстве с координатами типа координат Биркгофа. Нелокальные элементы, не вовлеченные в гамильтонову динамику (лучи в области тени или с неопределенной эволюцией), проецируются на край несимметричного фазового пространства (для 2D билиарда – на основания цилиндра Π) и оказываются “невидимыми”. В Σ проективность билиарда восстанавливает их равноправие. Соответствующие области L и D появляются вместе с разрушением части диагонали Δ , явно изменяя топологию Σ (после заклейки возникающих “дыр” листами проективной плоскости). Таким образом, в симметричном подходе достигается разрешение особенностей, скрытых при использовании классических координат Биркгофа или родственных им. Появление таких особенностей тесно связано с хаотическими свойствами билиардов.

Сингулярности по-разному влияют на хаотические свойства билиарда. (Для анализа этих свойств пригодны общие понятия хаотической динамики динамических систем и отображений, см., например, [5, 6, 12, 13], к которым относятся и билиарды.) Андреевские зоны подавляют хаос. Появление лакун приводит к разрушению траекторий “шепчущих галерей” (вблизи Δ) и возникновению хаотичности. Увеличение размеров L усиливает хаос, что связано с ростом числа гиперболических периодических траекторий, содержащих точки $\partial\Omega_-$. Это и физически очевидно, так как с увеличением размеров геометрической тени хаотические траектории все чаще будут сталкиваться с $\partial\Omega_-$, где и происходит их дисперсия.

Естественно предложить геометрический критерий хаоса. 1. При любой сколь угодно отличной от нуля мере лакун показатель Ляпунова в фазовом пространстве билиарда положителен. 2. При изменении размеров лакун показатель Ляпунова монотонно изменяется с ростом их фазового объема:

$$\mu_L > 0 \Rightarrow \lambda_B > 0; \quad \frac{d\lambda_B}{d\mu_L} > 0, \quad (11)$$

где λ_B – показатель Ляпунова [6]. Отметим, что в билиардах (как сохраняющих меру отображениях) этот показатель всегда неотрицателен (равен нулю в интегрируемых билиардах). Укажем на соответствии критерия (11) условию [4] хаотичности били-

арда, образованного дугами окружностей: дополнительные всякой такой дуги до полной окружности должны целиком лежать внутри Ω . Условие означает, что точки соединения дуг являются точками возврата и, следовательно, порождают лакуны в Σ . Исчезая, лакуны уступают место регулярным траекториям. Подчеркнем, что критерий (11) связывает факт положительной меры лакун с положительностью показателя Ляпунова вне лакун, то есть на оставшейся части доступного для динамики фазового пространства. Важно, что, используя этот критерий, можно оценить не только наличие, но и степень хаотичности соответствующего биллиарда. Кроме того, указанный критерий сохранится для биллиардов в высших размерностях.

Отметим, что хаотической компонентой может обладать и всюду выпуклый биллиард, когда лакуны отсутствуют, $\mu(L) = 0$. Другой его особенностью является присутствие регулярных фазовых траекторий, идущих вблизи и вдоль диагонали Δ симметричного фазового пространства. В геометрическом пространстве им соответствуют траектории “шепчущих галерей”. Наиболее ярко траектории такого типа представлены для биллиарда в круге, где они заполняют все симметричное фазовое пространство, расщепляя его на множество инвариантных кривых, параллельных диагонали Δ . Биллиард в круге – вырожденный случай (все периодические траектории имеют нейтральную устойчивость). Важно, что появление лакун разрушает всю совокупность траекторий типа “шепчущих галерей”.

Если появление лакун всегда индуцирует хаос, то рост дискриминант по-разному изменяет его. Например, показатель Ляпунова “стадиона” возрастает ($l < d$) или убывает ($l > d$) при удлинении его прямолинейных сторон (d – диаметр круга) [3]. Хаотизация происходит при “рассеянии” на криволинейных компонентах $\partial\Omega$. Прямолинейные участки параллельные лучи не рассеивают, но уже рассеянные (или сфокусированные) еще сильнее разводят (собирают), играя роль “усилителей” неустойчивости. Дискриминанты – их фазовый образ. С ростом D дефокусировка на выпуклых $\partial\Omega_+$ должна усиливаться. Однако увеличение их объема μ_D забирает часть доступного фазового пространства. Это тормозит хаотизацию. Как следствие, возникают результирующие критерии усиления (ослабления), “перепада” и “насыщения” стохастичности:

$$\frac{d\lambda_B}{d\mu_D} \geq 0; \quad \lim_{\mu_D \rightarrow 0} \left| \frac{d\lambda_B}{d\mu_D} \right| = \infty; \quad \lim_{\mu_D \rightarrow \mu_D^*} \frac{d\lambda_B}{d\mu_D} = 0. \quad (12)$$

В условие “насыщения” входит $\mu_D^* = \sum_i l_i^2 / (\sum_i l_i)^2$ – предельный размер дискриминант при $|\partial\Omega| \rightarrow \sum_i l_i$ для границы биллиарда $\partial\Omega$, включающей прямолинейные компоненты длины l_i .

Скачкообразное изменение стохастических свойств с появлением дискриминант происходит, например, при переходе от биллиарда в круге ($l = 0$ и $\mu_D = 0$) к стадиону ($\mu_D = 2l^2$). Используя выражения [22] для энтропии Колмогорова-Синяя H_{KS} (совпадающей с усредненным в фазовом пространстве показателем Ляпунова, $H_{KS} \approx \langle \lambda_B \rangle_\Sigma$), получим соотношения: $\partial\lambda_{stad}/(\partial\mu_D) \approx \approx \text{const } \mu_D^{-3/4} > 0$ при $l \ll d$ и $\partial\lambda_{stad}/(\partial\mu_D) \approx \approx -1/\sqrt{2\mu_D} ((1 - 2\mu_D)/2\pi) \ln \frac{2\pi}{7}(1 - 2\mu_D) < 0$ при $d \ll l$. При $\mu_D \rightarrow 0$ имеем $\partial\lambda_{stad}/(\partial\mu_D) \rightarrow +\infty$. Насыщению показателя неустойчивости соответствует спрямление границы $\partial\Omega \rightarrow \partial\Omega_0$ при удлинении $l \gg d$; когда $\mu_D^* = 1/2$ и $\partial\lambda_{stad}/(\partial\mu_D) \rightarrow 0$. Этот пример явно демонстрирует справедливость общих соотношений (12).

Укажем на различие в скорости заполнения лакунами и дискриминантами фазового пространства Σ при увеличении относительной доли рассеивающих $\partial\Omega_-$ и нейтральных $\partial\Omega_0$ компонент границы. Дискриминанты, как легко проверить, симметричны вдоль и поперек диагонали Δ и на развертке тора всегда имеют вид квадратов (см. рисунок). Их рост квадратичный: $\mu_D = \sum_i |(\partial\Omega_0)_i|^2$. Тогда как с увеличением $|\partial\Omega_-|/|\partial\Omega|$ лакуны ($\dot{K} < 0$) экспоненциально быстро $\sim \exp[\ln(1 - \dot{K})]$, расширяются поперек Δ . Это прямо связано с рассеивающим характером вогнутых компонент. С этим отличием можно также связать экспоненциальное расщепление корреляций в биллиардах отрицательной кривизны при их степенном спадании в дефокусирующих биллиардах. С изменением D для некоторых $\partial\Omega$ возможен переход к полностью регулярной динамике (например, биллиард внутри кругового сегмента при доведении его до половины круга). Монотонность $d\lambda_B/d\mu_L > 0$ или $d\lambda_B/d\mu_D \geq 0$ можно обнаружить численно и аналитически в различных семействах биллиардов. Конструктивность использования этой информации усиливается возможностью вычисления формы и размеров лакун и дискриминант чисто геометрическим способом по виду границы биллиардов, то есть фактически без использования динамических свойств траекторий.

Таким образом, топологическая структура симметричного фазового пространства биллиарда прямо влияет на его стохастичность. В дальнейшем становится доступной топологическая классификация всех 2D биллиардов разного типа. Они эквивалентны

компактным ориентируемым и неориентируемым 2D многообразиям. Характер динамики зависит от этой топологии. Можно также показать, что кинетическое симметричное описание бильярда (инвариантные распределения) будет непосредственно определяться динамикой (инволюцией). С коммутативностью наблюдаемых, соответствующих симметричным фазовым переменным (в отличие от некоммутативных операторов импульса и координаты), связаны новые возможности в описании квантового хаоса бильярдных систем. Поэтому выбор симметричных координат вносит важное физическое содержание в теорию. Этот подход естественно обобщается на многомерную и криволинейную геометрии.

Авторы выражают глубокую благодарность академикам В.Г.Барьяхтару и С.В.Пелетминскому за полезные обсуждения и ценные замечания. Также авторы глубоко признательны рецензенту за ценные замечания, позволившие улучшить содержание статьи.

1. Н. С. Крылов, *Работы по обоснованию статистической физики*, М.: Из-во АН СССР, 1950.
2. Я. Г. Синай, ДАН СССР **153**, 1261 (1963); УМН **25**, 141 (1970).
3. G. Benettin and J. M. Strelcyn, Phys. Rev. **A17**, 773 (1978).
4. Л. А. Бунимович, ЖЭТФ **89**, 1452 (1985); Chaos **1**, 187 (1991).
5. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности*, М.:

Наука, 1988.

6. Г. Шустер, *Детерминированный хаос*, М.: Мир, 1988.
7. T. Guhr, A. Muller-Groeling, and H. A. Weidenmuller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).
8. C. Ellegaard, T. Ghur, K. Lindemann et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1546 (1995).
9. H. Alt, H. D. Graf, R. Hofferbert et al., Phys. Rev. **E54**, 2303 (1996).
10. J. U. Nocel and A. D. Stone, Nature **385**, 45 (1997).
11. *Proc. of the Intern. Conf. on Classical and Quantum Billiards*, J. Stat. Phys. **83**, 1 (1996).
12. Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Ижевск: Издат. дом "Удмуртский университет", 1999.
13. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. И. Фомин, *Эргодическая теория*, М.: Наука, 1980.
14. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, М.: Наука, 1986.
15. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1974.
16. J. A. G. Roberts and G. R. W. Quispel, Phys. Rep. **216**, 177 (1992).
17. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ **46**, 1823 (1964).
18. I. Kosztin, D. L. Maslov, and P. M. Goldbart, Phys. Rev. Lett. **75**, 1735 (1995).
19. Б. И. Степанов, Е. В. Ивакин, А. С. Рубанов, ДАН СССР **196**, 567 (1971).
20. А. Ю. Лоскутов, А. Б. Рябов, Л. Г. Акиншин, ЖЭТФ **116**, 1781 (1999).
21. С. В. Найдёнов, В. В. Яновский, Теор. Матем. Физ. **126**, 110 (2001).
22. N. Chernov, Journal of Stat. Phys. **88**, 1 (1997).