Письма в ЖЭТФ, том 75, вып. 12, с. 750 – 755 © 2002 г. 25 июня

Излучение при движении зарядов над дифракционной решеткой

Ю. А. Победин

394018 ул.Станкевича 1, кв. 14. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию 26 декабря 2001 г.

После переработки 29 апреля 2002 г.

Определены состояния заряженной частицы с конечной длиной пробега в поле резонансной электромагнитной волны. Получены точные условия резонанса, механизмы модуляции и пучковой неустойчивости, плотность заряда и тока (закон Ома) в бесстолкновительном потоке резонансных частиц. Построена квантовая теория излучения при резонансном, адиабатическом взаимодействии частицы и волны с учетом взаимодействий с постоянным магнитным полем, наведенным на поверхности решетки зарядом и нерезонансными волнами. Определена мощность излучения, спектр и интервалы генерируемых частот. Полученные результаты могут иметь применение в теории плазмы, твердого тела и в электронике.

PACS: 41.60.–m, 52.35.–g, 63.20.Kr, 85.10.Jz

1. После теоретических работ [1] и экспериментальных исследований в оптическом диапазоне (эффект Смитта–Парселла [2]) эффект генерации электромагнитного поля потоком электронов, проходящим вблизи поверхности дифракционной решетки, перпендикулярно штрихам, вызывает интерес и в настоящее время. Используется в приборах О-типа с длительным взаимодействием, миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов, вида оротрон [3] – решетке в открытом, одномодовом резонаторе. Решетка создает режим медленных, поверхностных волн дифракционного излучения с фазовыми скоростями $v_{ph} \ll c$, c – скорость света, при взаимодействии частиц с которыми возникает генерация [4]. (Дифракционное излучение – рассеянное решеткой собственное поле потока содержит еще быстрые, отрывающиеся от поверхности гармоники, взаимодействием с которыми пренебрегаем [4].)

Существующие теории генерации основаны на известной в плазме [5] приближенной, классической теории энергообмена в системе частица – резонансная волна, распространяющихся в одном направлении с близкими по величине фазовой скоростью v_{ph} и скоростью v частицы. Квантовые теории энергообмена дополняют классическую (см., например, [6]).

Эти теории не применимы в случае конечной длины $L = Nd$ (d – период решетки, $N \gg 1$ – число периодов) пробега частицы в поле и длительном взаимодействии – условии адиабатического взаимодействия в системе $\omega T \gg 1$ (ω – частота колебаний, $T = L/v$ – время взаимодействия (по порядку величины)). Поэтому теория эффекта полностью не построена. Поле медленных волн вне резонатора пренебрежимо мало [4]. В данной работе построена квантовая, нерелятивистская теория резонансного, адиабатического взаимодействия частицы и волны. Рассматривая периодический потенциал электрон-волнового взаимодействия как барьер с конечной пространственно-временно́й "шириной" L и T [7], при выполнении в области барьера классического условия резонанса: $|\alpha| = |\Delta v|/v_{ph} < 1$, $\Delta v = v - v_{ph}$ (α – величина относительного рассинхронизма) и где длина волны поля $\lambda \gg \lambda_B$, λ_B – длина волны частицы. Радиационные явления и пучковая неустойчивость обусловлены подбарьерными переходами (квантовым параметрическим резонансом [7]) частиц с энергиями (в системе отсчета, связанной с волной) из запрещенных зон в известной задаче о частице в периодическом потенциале с циклическими граничными условиями.

Эффект интересен как хорошо изученная экспериментально модель процессов в реальных системах и средах с конечной длиной пробега частицы в поле, например в ограниченной плазме при взаимодействии с ленгмюровскими волнами и образовании пучковой неустойчивости, в теории твердого тела при взаимодействии частиц с длинноволновыми фононами в дефектных кристаллах и при каналировании, где L – длина неискаженной области решетки или канала.

Пренебрегая взаимодействием частиц в разреженном потоке, построим одночастичную теорию. Приводим решение трехмерного уравнения Шредингера с учетом характерных для данной системы взаимодействий: с постоянным однородным фокусирующим магнитным полем с напряженностью $\boldsymbol{\mathcal{H}} = (0, 0, \mathcal{H})$ (ось z лежит в плоскости решетки в направлении движения частиц, ось x параллельна штрихам, ось y – перпендикулярна ее плоскости) и векторным потенциалом $\mathbf{A}_{\mathcal{H}} = (0, x\mathcal{H}, 0)$, нерезонансными гармониками, а также с наведенным на поверхности решетки зарядом с потенциалом взаимодействия $V(\mathbf{r})$, с периодом d по z, вызывающим первичную модуляцию потока [8], возбуждающего решетку. Теория построена для амплитуд волн поля произвольной величины, ограниченных условием нерелятивистского приближения.

2. Скалярный потенциал поля медленных волн представим в виде

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\sum_{m\neq 0} r_m(x,y)\cos\left(k_m z-\omega t+\eta_m\right), \qquad (1)$$

где $k_m=\omega/v_m=2\pi m/d$, v_m – фазовая скорость m-й волны, $\pi\geq\eta_m\geq-\pi$ – фаза, $r_m(x,y)=$ $=r_m(x)\exp\left(-k_m^y y\right)$, $k_m^y=(1-(v_m/c)^2)^{1/2}$, $r_m(x)$ – амплитуда m-й волны с известным распределением ее величины по x [4]. Векторный потенциал $\mathbf{A}_f$ имеет тот же вид ($\mathbf{A}_f$, Φ соответствуют напряженностям электрического и магнитного полей в классической теории оротрона [4]). В калибровке Лоренца $|\mathbf{A}_f|\sim c^{-1}|\Phi|$. Далее величиной $\mathbf{A}_f$ пренебрегаем.

Гамильтониан частицы над решеткой есть

$$\widehat{H}=\frac{1}{2m_e}\left(\widehat{\mathbf{p}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}_{\mathcal{H}}\right)^2+\frac{e\hbar}{cm_e}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\mathcal{H}}+W(\mathbf{r},t),$$

где $2\pi\hbar$ – постоянная Планка, m_e, e – масса и заряд электрона, $\widehat{p}=(\widehat{p}_x,\widehat{p}_y,\widehat{p}_z)$, $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ – операторы импульса и спина, $W=V-e\Phi$.

Решение уравнения Шредингера ищем в виде

$$\Psi=\kappa(x)\chi(\mathbf{r},t)\exp\left(i\hbar(p_y y-E_\perp t)\right), \qquad (2)$$

где p_y – поперечная составляющая импульса, $E_\perp$ – энергия поперечного движения.

Пусть $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ таково, что в области поперечного движения, сравнимого с ларморовым радиусом V и Φ меняются слабо. В уравнении пренебрегаем производными по x, y от χ, считая ее медленной функцией этих переменных. Известно, что движение волнового пакета в поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ совпадает с движением классической частицы с координатами x_0, y_0. Полагая в ларморовой области $W=W(z,t;\,x_0,y_0)$, $\chi=\chi(z,t;\,x_0,y_0)$, x_0, y_0 – параметры уравнения, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\kappa\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}-\frac{2m_e}{\hbar^2}\left(W-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\chi\right]=$$

$$=-\chi\left[\frac{d^2\kappa}{dx^2}+\frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E_\perp-\frac{m_e}{2}\left(\frac{e\mathcal{H}}{cm_e}\right)^2(x-x_0)^2\right)\kappa\right],$$

где $x_0=cp_y/e\mathcal{H}$. Координатная часть известного решения уравнения [9] относительно κ есть

$$\kappa=\exp\left(-\frac{e}{2c\hbar}\mathcal{H}(x-x_0)^2\right)H_n\left(r\sqrt{\frac{e}{c\hbar}\mathcal{H}}(x-x_0)\right),$$

где H_n – полиномы Эрмита, $E_\perp\equiv E_{n,\sigma}=(n+\dfrac{1}{2}+$ $+\sigma)\dfrac{e\hbar}{cm_e}\mathcal{H}$, $\sigma=\pm\dfrac{1}{2}$, n – целые числа. Включив его известную спиновую часть и экспоненциальный множитель (2) в κ, обозначим волновую функцию поперечного движения $\psi_{n,\sigma}(x,y,t)$.

Полагая, что частица резонансна с m-й волной (1). Переходим в связанную с ней (сопутствующую) систему отсчета, введя переменную $2u=k_m z-\omega t+\eta_m$, $u(L,T)\geq u\geq u(0,0)$, $\Delta u=k_m\alpha L/(1+\alpha)=$ $=\pi m\alpha N/(1+\alpha)$ – "эффективная" ширина барьера и "местное" время $\tau=t-\eta_m/\omega$, $T>\tau>0$; переменные, связанные с "облаком" (шубой) нерезонансных гармоник, есть $z'=z$, $t'=t$, $t_0=\eta_m/\omega$ – начало отсчета t'. Уравнение относительно χ в новых переменных имеет вид

$$\left[\left(\widehat{H}_r-i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}\right)-\left(\widehat{H}_{cl-lc}-i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\right)\right]\chi=0,$$

где

$$\widehat{H}_r=\frac{1}{2m_e^*}\widehat{\mathcal{P}}^2-\frac{1}{2}\omega\widehat{\mathcal{P}}-W_m(u),$$

$m_e^*=4m_e k_m^{-1}$ – эффективная "масса" частицы в поле резонансной волны, $\widehat{\mathcal{P}}=-i\hbar(\partial/\partial u)$ – оператор обобщенного импульса, $W_n=er_m\cos 2u$,

$$\widehat{H}_{cl-lc}=\frac{1}{2m_e}(\widehat{P}_{z'}^2-\{\widehat{P}_{z'},\widehat{\mathcal{P}}\})-W_{cl-lc},$$

$\{\widehat{P}_{z'},\widehat{\mathcal{P}}\}$ – антикоммутатор $\widehat{P}_{z'}$, $\widehat{\mathcal{P}}$,

$$W_{cl-lc}=e\sum_{m'\neq m} r_{m'}(x_0,y_0)\cos\left(k_{m'}z'-\omega t'+\eta_{m'}\right).$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\chi(u,\tau;\,z',t')=\psi_{cl-lc}\varphi(u)\exp\left(i(\mathcal{P}_{sh}u-\Omega'\tau)\right), \qquad (3)$$

где $\mathcal{P}_{sh}=2k_{sh}/k_m=4\Omega_{sh}/\omega$, $\hbar k_{sh}$ – продольный импульс частицы, синхронной с волной ($\alpha=0$), $\hbar\Omega'=E'$ – энергия частицы в сопутствующей системе,

$$\hbar\Omega_{sh}=E_{sh}=\frac{\hbar^2}{2m_e^*}\mathcal{P}_{sh}^2.$$

Полагаем, что из-за резонанса и "плавности" V, обусловленной большой скоростью частицы относительно решетки, χ медленно меняется по z' на $\Delta z=$ $=\Delta u/k_m$ по сравнению с изменением по u на Δu. В $\widehat{H}_{cl-lc}$ пренебрегаем производными по z' от χ. Тогда переменные в уравнении разделяются – ищем решения уравнения

$$\psi_{cl-lc}\left\{\left[\frac{1}{2m_e^*}\widehat{\mathcal{P}}^2-((E_{sh}+E')+W_m)\right]\varphi\right\}=$$

$$= \varphi\left(W_{cl-lc} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_{cl-lc} \tag{4}$$

(знак "штрих" у z', t' здесь и далее опускаем).

Полагая постоянную разделения равной нулю, ищем решения уравнений

$$\left(\frac{d}{dt} - \frac{i}{\hbar}W_{cl-lc}\right)\psi_{cl-lc} = 0, \tag{5}$$

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + (\mathcal{P}^2 + 2q\cos 2u)\right]\varphi = 0, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{P}^2 = \frac{2m_e^*}{\hbar^2}(E_{sh} + E') \neq 0, \quad q = \frac{1}{\hbar^2}em_e^* r_m(x_0, y_0),$$

$$E' \equiv E'_{\mathcal{P}} = \frac{\hbar^2}{2m_e^*}\mathcal{P}^2 - E_{sh}.$$

Полагаем включение взаимодействия мгновенным, так как время включения $\Delta t \sim \lambda/\nu$ $(L \gg \lambda)$ [6]. Величину V представим в виде разложения по векторам обратной решетки K_m и при очевидной связи между z и t, $V(z; x_0, y_0) = \sum_m V_m(x_0, y_0)\cos(k_m vt)$. Подставив $V(t)$ в (5), получим при начальном условии $\psi_{cl-lc}(t_0) = 1$, используя определение производящей функции бесселевых функций J, что

$$\psi_{cl-lc} = \psi_{cl}\psi_{lc}, \tag{7}$$

где

$$\psi_{lc} = \prod_m \exp(iV'_m \sin(k_m z_0)\times$$

$$\times\left\{J_0(V'_m) + \sum_{m'\neq 0} J_{m'}(V'_m)\exp(im'(k_m z + \pi))\right\},$$

$$V'_m = V_m(x_0, y_0)(\hbar k_m v)^{-1} = dV_m(2\pi\hbar m v)^{-1} =$$

$$= V_m(\hbar\omega(1+\alpha))^{-1}, \quad z_0 = vt_0,$$

$$\psi_{cl} = \prod_{m'\neq m}\{J_0(\vartheta_{m'}) + \sum_{m''\neq 0} J_{m''}(\vartheta_{m'})\times$$

$$\times\exp(im''(k_{m'}z - \omega t + \eta_{m',m}))\},$$

$$\vartheta_{m'} = \gamma_{m'}(x_0, y_0)\sin\left(\frac{1}{2}(\omega t - \eta_m)\right),$$

$$\eta_{m',m} = \frac{1}{2}(2\eta_{m'} - \eta_m + \pi),$$

$$\gamma_{m'} = 2er_m(x_0, y_0)(\hbar\omega)^{-1}.$$

Полагая, что, в отличие от результатов [8], применимых при малых прицельных параметрах или вдали от решетки, прицельный параметр y_0 по прядку величины значительно больше атомных или межатомных расстояний. Из-за кулоновского характера электрон-решеточного взаимодействия считаем, что коэффициенты $V_m \sim 1/y_0$. Из известных свойств функций Бесселя следует, что это взаимодействие преобладает в период возбуждения решетки или вдали от нее, когда $r_{m'}$ пренебрежимо малы, а $\psi_{cl} \sim 1$. Влияние электрон-решеточного взаимодействия уменьшается ($\psi_{lc} \to 1$) при увеличении y_0, ω, v и уменьшении d. При увеличении $r_{m'}$ взаимодействие с "облаком" модулирует волновую функцию (3): ψ_{cl} минимальна, уменьшаясь с ростом $r_{m'}$ при $\vartheta_{m'} = \pm\gamma_{m'}$, и максимальна, $\psi_{cl} = 1$, в нулях $\vartheta_{m'}$. Полагая в (6) $q = 0$, получим $\varphi = c_{\mathcal{P}}^{(\pm)}\varphi_{in}^{(\pm)}$, $C_{\mathcal{P}}^{(\pm)} = \mathrm{const}$, где $\varphi_{in}^{(\pm)} = \exp(\pm i\mathcal{P}u)$. Тогда χ – функция падающей, "обгоняющей" волну $\mathcal{P}^+$-частицы ($\mathcal{P} > 0$) и "отстающей" от волны $\mathcal{P}^-$-частицы ($\mathcal{P} < 0$) есть

$$\widehat{\chi}_{in}^{(\pm)} = C_{\mathcal{P}}^{(\pm)}\widehat{\psi}_{\mathcal{P}}^{(\pm)}(u)\exp(-i\Omega'_{\mathcal{P}}(\tau),$$

где $\psi_{\mathcal{P}}^{(\pm)}(u) = \exp(i(\mathcal{P}_{sh} \pm \mathcal{P})u)$, а в переменных z, t с точностью до множителей, содержащих η_m,

$$\chi_{in}^{(\pm)} = c_{\mathcal{P}}^{(\pm)}\psi_{\mathcal{P}}^{(\pm)}(z)\exp(-i\Omega_{\mathcal{P}}^{(\pm)}t),$$

где

$$\psi_{\mathcal{P}}^{(\pm)}(z) = \exp(ik_z^{(\pm)}z), \quad k_z^{(\pm)} \equiv k^{(\pm)} = \frac{1}{2}k_m(\mathcal{P}_{sh} \pm \mathcal{P}),$$

$$\hbar\Omega_{\mathcal{P}}^{(\pm)} = E_{\mathcal{P}}^{(\pm)} = \frac{\hbar^2}{2m_e^*}(\mathcal{P}_{sh} \pm \mathcal{P})^2.$$

Полагая L периодом $\chi_{in}^{(\pm)}$ из условия квантования $K^{(\pm)}$ получим условия квантования $\mathcal{P}_{sh}$, $\mathcal{P}$-чисел: $\mathcal{P}_{sh} = 2h_0/mN$, $\mathcal{P} = 2h/mN$, h, h_0 – целые числа. Тогда, πmN – период $\widehat{\chi}_{in}^{(\pm)}, c_{\mathcal{P}}^{(\pm)} = (\pi mN)^{-1/2}$.

3. Частицы находятся в подбарьерных состояниях, когда решения уравнения Матье (6) с параметром $q < 0$ неустойчивы, то есть для $\mathcal{P}$ из интервалов [10]

$$b_{2s+1}(q) > \mathcal{P}^2 > a_{2s+1}(q), \quad a_{2s}(q) > \mathcal{P}^2 > b_{2s}(q), \tag{8}$$

а зоны энергий (6) в потоке падающих частиц с данным разбросом $\mathcal{P}$, отсчитываемые от E_{sh}, есть

$$\frac{\hbar^2}{2m_e^*}b_{2s+1} > E'_{\mathcal{P}} > \frac{\hbar^2}{2m_e^*}a_{2s+1},$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_e^*}a_{2s} > E'_{\mathcal{P}} > \frac{\hbar^2}{2m_e^*}b_{2s},$$

где $a_l(q)$, $b_l(q)$ – собственные значения функций Матье $ce_l(u, -q)$, $se_l(u, -q)$ [10]. Тогда фундаментальная система решений (6) есть ортонормированные на πmN функции $\varphi_{\mathcal{P}}^{(\pm)} = \widetilde{D}_{\mathcal{P}}^{(\pm)}\exp(\pm(\mu + i\mathcal{P})u)$, где

$\mu(q,\mathcal{P})$ – характеристический показатель, $\mathrm{Im}\mu = 0$, $\widetilde{D}_{\mathcal{P}}^{(\pm)}(u,q) = \sum_r (-1)^r C_r^{(l)}(q)\exp(\pm i(r-l)u)$, $C_r^{(l)}(q)$ – коэффициенты известного вида [10]. Полагаем $\mathcal{P} = l + \beta$, l – целая часть P, $1 > \beta$, $\beta = 2g/mN$, g – целые числа. В характерном для туннелирования решении (6) $\varphi_{\mathcal{P}} = \xi_1\varphi_{\mathcal{P}}^{(+)} + \xi_2\varphi_{\mathcal{P}}^{(-)}$ оставляем оба слагаемых при $\mu \lesssim 1/\Delta u$ – условии существования квантового параметрического резонанса. Определяя $\xi_{1,2}$, решаем вместо граничной эквивалентную ей временную задачу [6], "сшивая" $\widetilde{\chi}_{in}^{(\pm)}$ и χ (4) с $\varphi = \varphi_{\mathcal{P}}$ при $\tau = 0$. Используя условия ортогональности, получим для волновых функций $\mathcal{P}^+$-частиц

$$\xi_1^{(+)} = \xi G_l^{(+)}, \quad \xi_2^{(+)} = \xi\frac{\mu}{\mu - i\mathcal{P}}G_l^{(-)},$$

$$\xi = c_{\mathcal{P}}^{(\pm)}\left(\frac{2\mathrm{th}(\frac{1}{2}\mu\pi mN)}{\mu\pi mN}\right)^{1/2},$$

$$G_l^{(+)} = C_l^{(l)}(q) + \mu\sum_{r\neq l}(-1)^r\frac{C_r^{(l)}(q)}{\mu - i(r-l)},$$

$$G_l^{(-)} = C_l^{(l)}(q) + (\mu - i\mathcal{P})\sum_{r\neq l}(-1)^r\frac{C_r^{(l)}(q)}{\mu - i(r-l)}.$$

Для волновых функций $\mathcal{P}^-$-частиц $\xi_1^{(-)} = \xi_2^{(+)}$, $\xi_2^{(-)} = \xi^{(+)}$.

Подставив $\varphi_{\mathcal{P}}$ в (4) и возвращаясь к z, t, получим искомую волновую функцию подбарьерных нестационарных состояний, разложенную по плоским волнам $\psi_{\mathcal{P}}^{(\pm)}(z)$:

$$\Psi_{n,\sigma\mathcal{P}} = \mathcal{K}_{n,\sigma}^{cl-lc}[\xi_1^{(+)}D_{\mathcal{P}}^{(+)}\exp\left(\frac{1}{2}(\mu k_m z - \Gamma_{\mathcal{P}}t)\right)\psi_{\mathcal{P}}^{(+)}(z)\times$$
$$\times\exp(-i\Omega_{\mathcal{P}}^{(+)}t) + +\xi_2^{(+)}D_{\mathcal{P}}^{(-)}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}(\mu k_m z - \Gamma_{\mathcal{P}}t)\right)\psi_{\mathcal{P}}^{(-)}(z)\exp(-i\Omega_{\mathcal{P}}^{(-)}t)], \quad (9)$$

где $\mathcal{K}_{n,\sigma}^{cl-lc} = \psi_{n,\sigma}\psi_{cl-lc}$, $\Gamma_{\mathcal{P}}(q,\omega) = \omega\mu$ – постоянная распада $|\mathcal{P}^+\rangle$-состояния (инкремент нарастания $|\mathcal{P}^-\rangle$-состояния), $D_{\mathcal{P}}^{(\pm)}$ есть $\widetilde{D}_{\mathcal{P}}^{(\pm)}$ с множителями, содержащими η_m, появляющимися при переходе от u,τ к z,t.

Двукратно вырожденный, согласно симметрии потенциала $W_m(u)$ в сопутствующей системе, уровень $E'_{\mathcal{P}}$ частицы (случайное вырождение) в поле резонансной волны расщепляется при переходе в лабораторную систему на два: $E_{\mathcal{P}}^{(\pm)} > E_{sh}$, $E_{\mathcal{P}}^{(-)} < E_{sh}$. Частота спонтанного перехода есть $(\Delta\omega)_{\mathcal{P}} = \Omega_{\mathcal{P}}^{(+)} - \Omega_{\mathcal{P}}^{(-)} = \omega\mathcal{P}$. Усредняя $\widetilde{D}_{\mathcal{P}}^{(\pm)}$на πmN, так что $\overline{\widetilde{D}}_{\mathcal{P}}^{(\pm)} = C_l^{(l)}(q)$, и пренебрегая производной по t от $\mathcal{K}_{n,\sigma}^{cl-lc}$, как при получении (4), с учетом связи между z и t, получим мощность спонтанного излучения отдельной частицы [11]:

$$M_{n,\sigma,\mathcal{P}} = -\frac{1}{2}\hbar\omega\mathcal{P}\frac{\partial}{\partial t}(Y_{\mathcal{P}}^{(+)} - Y_{\mathcal{P}}^{(-)}) =$$
$$= \frac{\hbar\omega^2\mu}{2\pi mN}\mathcal{P}|C_l^{(l)}(q)|^2|\mathcal{K}_{n,\sigma}^{cl-lc}|^2(|\xi_1^{(+)}|^2\exp(2\mu u)+$$
$$+|\xi_2^{(+)}|^2\exp(-2\mu u)),$$

где

$$Y_{\mathcal{P}}^{(\pm)} = |C_{\mathcal{P}}^{(\pm)}|^2|\xi_1^{(+)}|^2|\overline{\widetilde{D}}_{\mathcal{P}}^{(\pm)}|^2|\mathcal{K}_{n,\sigma}^{cl-lc}|^2\exp(\pm 2\mu u)$$

– средние заселенности уровней $E_{\mathcal{P}}^{(\pm)}$, $M_{n,\sigma,\mathcal{P}}$ определена классически, так как $\hbar\omega\mathcal{P} = 4\alpha E_{sh}$.

Генерация при электрон-волновом взаимодействии обусловлена инверсией заселенностей уровней $E_{\mathcal{P}}^{(\pm)}$ с накачкой, осуществляемой внешним источником. $\mathcal{P}^-$-частицы поглощают его энергию с мощностью $-M_{n,\sigma,\mathcal{P}}$. Поскольку $C_l^{(l)}(q)$ – знакопеременная, непериодическая функция q [10], то в ее нулях может иметь место "случайный" срыв генерации.

Экспериментально получено, что спектр генерируемых частот имеет вид зон [4], где области генерации чередуются с зонами не генерируемых частот. Полагаем, что этот спектр обусловлен тепловым разбросом $\mathcal{P}$-чисел в потоке. Действительно, резонанс частица – волна имеет конечную ширину. Используя условия квантования $\mathcal{P}$-чисел и связь между $\mathcal{P}$ и α (которую получим, представив из определения $k^{(\pm)}$ $\mathcal{P}$-число в виде $2\Delta k/k_m$ и, полагая $\alpha = \Delta k/k_{sh}$, где $\Delta k = k - k_{sh}$, тогда $\alpha = \mathcal{P}/\mathcal{P}_{sh}$), получим минимальную величину $\alpha \neq 0$ при $h = 1$: $\alpha_{\min} = 2/mN\mathcal{P}_{sh}$. Так как фазовые скорости $m \pm 1$-й гармоники есть $v_{m\pm1} = mv_m/(m\pm1)$, то при равных v $|\alpha_{m-1}| > |\alpha_{m+1}|$ ($\alpha_{m\pm1}$ – величины относительного рассинхронизма с $m\pm1$-й волнами). Полагая $\alpha = -\alpha_{m+1}$, получим скорость частицы, резонансной с m и $m+1$-й гармониками: $v_{\max} = 2mv_m/(2m+1)$. Отсюда максимальное по величине значение $\alpha_{\max} \lesssim 1/(2m+1)$. Тогда разброс $\mathcal{P}$-чисел в потоке резонансных с m-й волной частиц есть

$$\frac{\mathcal{P}_{sh}}{2m+1} \gtrsim |\mathcal{P}| \geq \frac{2}{mN}. \quad (10)$$

Для $\mathcal{P}$-чисел из (10), из зон $a_{2s+1} > \mathcal{P}^2 > a_{2s}$, $b_{2s+2} > \mathcal{P}^2 > b_{2s+1}$ [10] падающие частицы с энергиями

$$\frac{\hbar^2}{2m_e^*}a_{2s+1} > E'_{\mathcal{P}} > \frac{\hbar^2}{2m_e^*}a_{2s}, \quad \frac{\hbar^2}{2m_e^*}b_{2s+2} > E'_{\mathcal{P}} > \frac{\hbar^2}{2m_e^*}b_{2s+1}$$

из разрешенных зон энергий частицы в периодическом потенциале проходят барьер без диссипации энергии, вызванной резонансным взаимодействием. Такие состояния назовем надбарьерными.

Совокупность энергий $E'_{\mathcal{P}}$ потока резонансных $\mathcal{P}^{\pm}$-частиц с разбросом $\mathcal{P}$-чисел из (10) образует чередующиеся зоны энергий над- и подбарьерных состояний, расположенные симметрично относительно E_{sh}. Соответственно, спектр частот, генерируемых потоком с таким тепловым разбросом $\mathcal{P}$-чисел, также имеет вид зон, где зоны генерации шириной $\omega\sqrt{b_{2s+1}} > (\Delta\omega)_{\mathcal{P}} > \omega\sqrt{a_{2s+1}}$, $\omega\sqrt{a_{2s}} > (\Delta\omega)_{\mathcal{P}} > \omega\sqrt{b_{2s}}$ (8) чередуются с областями-"щелями" не генерируемых частот из интервалов $\omega\sqrt{a_{2s+1}} > (\Delta\omega)_{\mathcal{P}} > \omega\sqrt{a_{2s}}$, $\omega\sqrt{b_{2s+2}} > (\Delta\omega)_{\mathcal{P}} > \omega\sqrt{b_{2s+1}}$.

Изменение положения зеркал резонатора [4], меняя собственную частоту колебательного контура оротрона, не перестраивает частоту генерации, а выделяет одну из них. Перестройка частоты может происходить при изменении ускоряющего напряжения в случае моно-или квазимоноэнергетического потока с разбросом $\mathcal{P}$-чисел, не превышающем ширину интервалов (8). Тогда частота перестраивается скачкообразно при безызлучательном перебросе из одной зоны квантового параметрического резонанса в другую и меняется "плавно" внутри зон из-за квазидискретности β-чисел.

Ширина "щелей" убывает с ростом q, вырождаясь в асимптотически узкие полосы, так как при $|q| \gg 1$, $a_{2s+1} \sim a_{2s}$, $b_{2s+2} \sim b_{2s+1}$ [10], при этом ширина зон генерации и диапазоны генерируемых частот увеличиваются. Число зон $l_{\max}$ равно целой части $\mathcal{P}_{\max} = \mathcal{P}_{sh}/(2m+1)$ (10). Максимальная частота генерации $-\omega_{\max} \lesssim \omega\mathcal{P}_{sh}/(2m+1)$, минимальная $\omega_{\min} = 2\omega/mN$. Очевидно, что излучение потоком частиц в состояниях с разными m, σ, но равными $\mathcal{P}$ из (10), когерентно, как и излучение частицами с равными $\mathcal{P}$, но отличающимися x_0, y_0. Интенсивность когерентного излучения растет с увеличением числа частиц с одинаковыми $\mathcal{P}$-числами, что может иметь место при увеличении объема потока, как при увеличении толщины потока [8], так и его ширины.

Мощность излучения отдельной частицы растет с ростом ω и $\mathcal{P}$, но при увеличении $\mathcal{P}$, при $q, \omega = \text{const}$, ширина зон генерации и величина μ уменьшаются (см. диаграмму устойчивости решений уравнения Матье [10]), уменьшая мощность когерентного излучения из-за уменьшения μ и числа частиц в подбарьерных состояниях, что имеет место в эффекте Смитта–Парселла – когерентном излучении малой интенсивности частицами из узких зон подбарьерных состояний с $\mathcal{P} \gg 1$ – в состояниях из зон с номерами $l \gg 1$.

Частицы проходят барьер без диссипации продольной энергии в состояниях синхронизма ($\mathcal{P} = 0$), волновые функции которых получим из (4), где $\varphi = \text{const} = 1$, $u = 0$, $W_n = er_m$. Тогда

$$\Psi_{n,\sigma,0} = \mathcal{K}_{n,\sigma}^{cl-lc} \exp(i(k_{sh}z - (\Omega_{sh} + \frac{1}{\hbar}er_m)t)). \quad (11)$$

4. Плотность заряда [9] частиц с $\mathcal{P} \neq 0$ есть $\rho_{n,\sigma,\mathcal{P}} = \rho_{n,\sigma,0}\rho_{\mathcal{P}}$, где $\rho_{n,\sigma,0} = e|\mathcal{K}_{n,\sigma}^{cl-lc}|^2 = e|\Psi_{n.\sigma,0}|$ – плотность заряда частиц с $\mathcal{P} = 0$ (11), $\rho_{\mathcal{P}} = |\psi_{\mathcal{P}}|^2$, $\psi_{\mathcal{P}}$ – функции (9) без $K_{n,\sigma}^{cl-lc}$. Поскольку $|K_{n,\sigma}^{cl-lc}|^2$ – огибающая для всех $\rho_{\mathcal{P}}$, то модуляция, обусловленная характерными для данной системы взаимодействиями, не зависит от состояний частиц в поле резонансной волны. Так, при преобладании взаимодействия с облаком нерезонансных гармоник поток, "сжимаясь" в минимумах $|\psi_{cl}|^2$ (7) образует сгустки – "крупные" частицы с длиной волны модуляции $\lambda_m = cl/m$, начинающейся в момент времени t_0.

В сгустке $\rho_{\mathcal{P}} = \rho_{\mathcal{P}}^{st} + \rho_{\mathcal{P}}^{(+)} + \rho_{\mathcal{P}}^{(-)}$, где

$$\rho_{\mathcal{P}}^{st} = |c_{\mathcal{P}}|^2|\xi_1||\xi_2||\widetilde{D}_{\mathcal{P}}^{(+)}||\widetilde{D}_{\mathcal{P}}^{(-)}|\cos 2(\mathcal{P}u + \eta_D),$$

$$\rho_{\mathcal{P}}^{(\pm)} = |c_{\mathcal{P}}|^2|\xi_{1,2}|^2|\widetilde{D}_{\mathcal{P}}^{(\pm)}|^2 \exp(\pm(\mu k_m z - \Gamma_{\mathcal{P}}t)),$$

$$\eta_d = \frac{1}{2}\arg\xi_1\widetilde{D}_{\mathcal{P}}^{(+)}(\xi_2\widetilde{D}_{\mathcal{P}}^{(-)})^*,$$

то есть в потоке, наряду с $\rho_{n,\sigma,0}$, существует устойчивая – интерференционная фракция с плотностью заряда $\rho_{\mathcal{P}}^{st}$, существующая при любых по величине q и две неустойчивые, с плотностями $\rho_{\mathcal{P}}^{(\pm)}$, обусловленные подбарьерными переходами. Пучковая неустойчивость потока частиц в состояниях $|n.\sigma, \mathcal{P} = \text{const}\rangle$ с инкрементом и декрементом $\Gamma_{\mathcal{P}}(q,\omega)$ (9) обусловлена квантовым параметрическим резонансом.

В выражении для продольной составляющей плотности тока j [9] пренебрегаем $\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{K}_{n,\sigma}^{cl-lc}$ и переходим к $\partial/\partial u$. Тогда

$$j_{n,\sigma,\mathcal{P}} = i\frac{ev_{sh}}{2\mathcal{P}_{sh}}|\mathcal{K}_{n,\sigma}^{cl-lc}|^2(\psi_{\mathcal{P}}^*\frac{\partial}{\partial n}\psi_T - \text{к.с.}).$$

Полагая $v_{sh} = eT_mU/2m_eL$, где $T_m = L/v_{sh}$, U – ускоряющее напряжение, получим закон Ома для данной системы:

$$j_{n,\sigma,\mathcal{P}} = \Lambda_{n,\sigma,\mathcal{P}}U,$$

где

$$\Lambda_{n,\sigma,\mathcal{P}} = \Lambda_{n,\sigma,0}\Lambda_{\mathcal{P}}, \quad \Lambda_{n,\sigma,0} = \frac{e^2T_m}{2m_eL}|\mathcal{K}_{n,\sigma}^{cl-lc}|$$

– электропроводность, определяемая характерными для системы взаимодействиями, а электропроводность, определяемая резонансным электрон-волновым взаимодействием, есть

$$\Lambda_{\mathcal{P}} = \frac{i}{2}(\psi^*_{\mathcal{P}}\frac{\partial}{\partial u}\psi_{\mathcal{P}} - \text{к.с.}) = \Lambda^{st}_{\mathcal{P}} + \Lambda^{(+)}_{\mathcal{P}} + \Lambda^{(-)}_{\mathcal{P}},$$

где

$$\Lambda^{st}_{\mathcal{P}} = |C^{(l)}_l(q)|^2|\xi_1||\xi_2|\sqrt{1+\left(\frac{\mu}{\mathcal{P}_{sh}}\right)^2}\sin^2(\mathcal{P}u + \eta_{\xi,\mu}),$$

$$\Lambda^{(\pm)}_{\mathcal{P}} = |C^{(l)}_l(q)|^2|\xi_{1,2}|^2(1\pm\alpha)\exp(\pm 2\mu u),$$

$$\eta_{\xi,\mu} = \frac{1}{2}(\arg\xi_1\xi_2^* + \mathrm{arctg}\frac{\mu}{\mathcal{P}_{sh}}),$$

устойчивые фракции плотности тока $j_{n,\sigma,0}, j^{st}_{\mathcal{P}}$ с проводимостями $\Lambda_{n,\sigma,0}, \Lambda^{st}_{\mathcal{P}}$ и две неустойчивые, с проводимостями $\Lambda^{(\pm)}_{\mathcal{P}}$.

5. Полученные резонансные состояния могут иметь место и в других системах. “Память” о системе содержится в $\mathcal{K}$-функции, отличаясь, например, от $\mathcal{K}$-функции в твердом теле, в частности, влиянием “шубы”, потенциалы которой разложены в ряд Фурье по временным гармоникам, в отличие от (1). Волновые функции резонансных, положительно заряженных частиц имеют тот же вид, но с заменой u и $u+\pi/2$.

---

1. И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ. **6**, 3 (1942); В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ **16**, 15 (1946).
2. S. L. Smith and M. Purceell, Phys. Rev. **91**, 1069 (1953).
3. Ф. С. Русин, Р. Д. Богомолов, Изв. вузов, Радиофизика **11**, 756 (1968).
4. В. П. Шестопалов, *Дифракционная электроника*, Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1976.
5. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, М.: Наука, 1979.
6. М. В. Федоров, УФН **153**, 213 (1981).
7. Ю. А. Победин, ЖЭТФ **96**, 1476 (1990); Письма в ЖТФ **18**, 78 (1993).
8. D. B. Chang and G. C. McDaniel, Phys. Rev. Lett. **63**, 1066 (1989).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, 1963.
10. Н. В. Мак-Лахлан, *Теория и приложения функций Матье*, М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
11. Р. Пантел, Г. Путхов, *Основы квантовой электроники*, М.: Мир, 1972.