

ПО ИТОГАМ ПРОЕКТОВ
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Проект РФФИ # 99-02-17269

Хаос, фракталы и полеты атомов в резонаторах

С. В. Пранц

*Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева Дальневосточного отделения РАН
690041 Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 25 апреля 2002 г.

Проведено полуклассическое исследование нелинейной динамики взаимодействия двухуровневых атомов с полем стоячей волны в высокочастотном резонаторе. В результате движения атомов или амплитудной модуляции волны возникает динамическая локальная неустойчивость сильно связанной атомно-полевой системы. Демонстрируется возникновение гамильтонова динамического хаоса, фракталов и полетов Леви в моделях двух экспериментальных устройств – (микро)мазера с тепловыми ридберговскими атомами и микролазера с холодными обычными атомами. В результате численных экспериментов показана возможность наблюдения проявлений классического хаоса, атомных фракталов и полетов в соответствующих реальных экспериментах. Обращается внимание на перспективность работы с атомно-полевыми системами в высокочастотных резонаторах с модуляцией сильной связи для дальнейшего изучения квантовоклассического соответствия, квантового хаоса и декогерентности.

PACS: 05.45.Mt, 42.50.Vk

1. Атом с долгоживущими состояниями рабочего перехода и полевая мода высокочастотного резонатора образуют сильно связанную нелинейную динамическую систему с обменом возбуждениями. Простая модель Джейнса-Каммингса (Jaynes-Cummings) описывает когерентный периодический обмен возбуждением без потерь [1]. Виртуальные процессы [2], внешнее возмущение [3, 4] и модуляция стоячей волны в резонаторе [5, 6], вообще говоря, разрушают периодичность и в полуклассическом пределе могут вызвать гамильтонов хаос. “Визитной карточкой” детерминированного (динамического) хаоса в классических системах является экспоненциально быстрое разбегание изначально близких траекторий в замкнутой области фазового пространства. Квантовая эволюция унитарна и никакого квантового хаоса *bona fide* в смысле экспоненциальной неустойчивости, скажем, состояний ограниченной квантовой системы быть не может. Измерения, однако, нарушают унитарную эволюцию квантовых состояний, проявляя признаки классического хаоса, если, конечно, хаотичен классический аналог данной квантовой системы. С другой стороны, квантовая эволюция может подавлять классический хаос, что проявляется в эффектах динамической локализации и туннели-

рования. Изучение всех этих явлений активно проводится с атомами и фотонами в резонаторах и ловушках [7]. Сильно связанная атомно-полевая система в высокочастотном резонаторе – идеальный объект для фундаментальных тестов квантовой механики [8] (принципа суперпозиции, нелокальности, телепортации, коллапса волновой функции, неразрушающих измерений и т.п.) и исследования квантовоклассического соответствия, одним из аспектов которого является проблема квантового хаоса [9].

Рассмотрим N одинаковых двухуровневых атомов, приготовленных с помощью лазерного возбуждения с заданным значением внутренней энергии и с помощью селектора скоростей с заданной скоростью движения. Такая монокинетическая “капля” инжектируется в высокочастотный одномодовый резонатор, на выходе из которого измеряется внутренняя энергия атомов, время их полета сквозь резонатор и скорость атомов. Условием режима сильной связи является выполнение неравенства $\Omega_0 \sqrt{N} \gg \gg T_a^{-1}, T_f^{-1}$, где $T_{a,f}$ — времена релаксации атома и поля, соответственно, Ω_0 – амплитуда коэффициента атомно-полевой связи (вакуумная частота Раби). В режиме сильной связи возникают осцилляции – многократный обмен возбуждениями между атомами и

полем их собственного излучения, поддерживаемым высокодобротным резонатором, – процесс, экспериментально наблюдаемый даже с одиночными атомами и фотонами [8, 10].

В настоящей работе мы ориентируемся на два типа экспериментальных устройств — ридберговский атомный лазер и микролазер. Первый оперирует с тепловыми высоковозбужденными (ридберговскими) атомами с долгоживущими состояниями рабочего перехода $T_a \simeq 10^{-2}$ с и гигантским электродипольным моментом перехода $d_a \simeq 10^3$ а.е. Сверхпроводящий микроволновый резонатор ридберговского лазера имеет очень высокую добротность, $Q \simeq 10^9 \div 10^{10}$, и отличается слабо релаксирующими фотонами в полости, $T_f \simeq 10^{-3} \div 10^{-2}$ с. Благодаря большой величине атомного момента и несмотря на макроскопические размеры резонатора, $L \simeq 1 \div 10$ см, вакуумная частота достигает величины порядка $\Omega_0 \simeq 2\pi \cdot 10^5$ Гц, достаточной для установления режима сильной связи [8]. В микролазерах используются обычные холодные атомы и высокодобротные резонаторы Фабри–Перо микронного размера ($Q \simeq 10^5 \div 10^6$), в которых вакуумная частота Раби достигает значений $\Omega_0 \simeq 2\pi \cdot 10^8$ Гц [10].

При движении атомов вдоль оси r резонатора они пересекают узлы и пучности стоячей волны, которая описывается некоторой функцией $f(r)$. Фактически коэффициент атомно-полевой связи модулируется стоячей волной с частотой $k_f v_a$, где v_a – скорость атома. Простейший модельный гамильтониан поставленной задачи в приближении вращающейся волны имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hbar\omega_a \hat{R}_z + \hbar\omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\Omega_0 f(r) (\hat{a}^\dagger \hat{R}_- + \hat{a} \hat{R}_+), \quad (1)$$

где введены коллективные операторы атомного импульса $\hat{P} = \sum_j \hat{p}_j$, внутренней энергии атомов $\hat{R}_z = \frac{1}{2} \sum_j \hat{\sigma}_z^j$ и атомного дипольного момента $\hat{R}_\pm = \sum_j \hat{\sigma}_\pm^j$ с обычными коммутационными соотношениями $[\hat{R}_+, \hat{R}_-] = 2\hat{R}_z$, $[\hat{R}_z, \hat{R}_\pm] = \pm \hat{R}_\pm$, а также операторы одномодового поля с коммутатором $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. В этой работе используется существенно полуклассический подход к описанию нелинейной динамики сильно связанной атомно-полевой системы с гамильтонианом (1). В гейзенберговском представлении выводится замкнутая конечномерная система уравнений движения для ожидаемых значений операторов характерных величин.

2. Тепловые ридберговские атомы в микроволновом резонаторе. Энергия отдачи атома, испускающего микроволновые фотоны, очень мала, по-

этому изменением кинетической энергии в гамильтониане (1) в этом разделе мы пренебрегаем (приближение Рамана–Ната). Ридберговские атомы летят сквозь высокодобротный одномодовый микроволновый резонатор с модовой функцией $f(r) = \sin k_f r$ с постоянной скоростью v_a , излучая и поглощая фотоны, причем их взаимодействие с полем излучения периодически модулируется стоячей волной с частотой $k_f v_a$. Факторизуя уравнения Гейзенберга для операторов $\hat{a}^\dagger \exp(-i\omega_f t) \pm \hat{a} \exp(i\omega_f t)$, $\hat{R}_- \exp(i\omega_f t) \pm \hat{R}_+ \exp(-i\omega_f t)$ и \hat{R}_z , получим следующую замкнутую систему уравнений Максвелла–Блоха:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \delta y - zp \sin \beta \tau, & \dot{y} &= -\delta x - ze \sin \beta \tau, \\ \dot{z} &= (xp + ye) \sin \beta \tau, & \dot{e} &= -y \sin \beta \tau, \\ \dot{p} &= -x \sin \beta \tau, \end{aligned} \quad (2)$$

для вещественных средних

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{N} \langle \hat{R}_- \exp(i\omega_f t) + \hat{R}_+ \exp(-i\omega_f t) \rangle, \\ y &= \frac{i}{N} \langle \hat{R}_- \exp(i\omega_f t) - \hat{R}_+ \exp(-i\omega_f t) \rangle, \\ e &= \frac{1}{\sqrt{N}} \langle \hat{a}^\dagger \exp(-i\omega_f t) + \hat{a} \exp(i\omega_f t) \rangle, \\ p &= \frac{i}{\sqrt{N}} \langle \hat{a}^\dagger \exp(-i\omega_f t) - \hat{a} \exp(i\omega_f t) \rangle, \\ z &= \frac{1}{N} \langle \hat{R}_z \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что система (2) отличается от уравнений Максвелла–Блоха для поставленной задачи в наших работах [3, 4] тем, что она записана во вращающейся с частотой ω_f системе координат и нормирована по времени на величину $\Omega_0 \sqrt{N}$. Параметр $\delta = (\omega_f - \omega_a) / \Omega_0 \sqrt{N}$ является нормированной расстройкой, а $\beta = k_f v_a / \Omega_0 \sqrt{N}$ — нормированной частотой модуляции, вызванной движением атомов через узлы и пучности стоячей волны. Независимыми интегралами движения (2) являются длина вектора Блоха и плотность числа возбуждений:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad W = e^2 + p^2 + 2z = 2(2n + z), \quad (4)$$

где n – среднее число фотонов в моде. Введем новые переменные

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{N\sqrt{N}} \langle \hat{a}^\dagger \hat{R}_- + \hat{a} \hat{R}_+ \rangle = \frac{1}{2}(xe - yp), \\ v &= \frac{i}{N\sqrt{N}} \langle \hat{a}^\dagger \hat{R}_- - \hat{a} \hat{R}_+ \rangle = \frac{1}{2}(xp + ye), \end{aligned} \quad (5)$$

имеющие смысл амплитуды осцилляций плотности энергии атомно-полевого взаимодействия и скорос-

ти изменения плотности инверсии населенности атомов z , соответственно. С помощью интегралов движения (4) пятимерная система уравнений Максвелла-Блоха (2) приводится к трем уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \delta v, & \dot{v} &= -\delta u - \frac{1}{2}(Wz - 3z^2 + 1) \sin \beta\tau, \\ \dot{z} &= 2v \sin \beta\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

которые можно назвать нелинейными уравнениями Блоха с инвариантом $4(u^2 + v^2) + Wz^2 + 2z - 2z^3 = W$. Таким образом, в основе динамики ридберговского атомного лазера лежит сравнительно простая нелинейная динамическая система с полутора степенями свободы. Для атомов, покоящихся или движущихся вдоль направления, по которому поле в резонаторе пространственно однородно, то есть при $\sin \beta\tau = 1$, уравнения (6) приобретают дополнительный независимый интеграл движения $C = 2u - \delta z$ и уравнение для z ,

$$\ddot{z} = -\frac{\delta}{2}(C + \delta z) - \frac{1}{2}(Wz - 3z^2 + 1) \quad (7)$$

интегрируется в эллиптических функциях. При точном резонансе, $\delta = 0$, величина $u = u_0$ является константой движения для произвольной модуляции вакуумной частоты Раби. Уравнение для инверсии имеет вид

$$\dot{z} = \pm \sqrt{W - 4u_0 - Wz^2 - 2z + 2z^3} \sin \beta\tau \quad (8)$$

и точно решается в терминах эллиптических функций [4]. В случае большой расстройки, $|\delta| \gg 1$, из простых соображений малости величины $\delta^{-1}\dot{u}$ следует малость переменной v и, следовательно, малость изменения инверсии z в процессе эволюции. В результате переменная u приближенно удовлетворяет простому уравнению гармонического осциллятора с вынужденной силой. В случае малой частоты модуляции, $\beta \ll 1$ (медленные атомы), имеем приближенный дополнительный интеграл движения $2u \sin \beta\tau - \delta z \simeq \text{const}$. Осцилляции представляют собой практически регулярный сигнал со слабой амплитудной и частотной модуляцией. В обратном пределе, $\beta \gg 1$, то есть когда скорость атомов настолько велика, что частота модуляции значительно больше частоты Раби, осцилляции Раби являются медленными регулярными колебаниями z , на которые накладываются быстрые осцилляции с частотой β и малой амплитудой $1/\beta^2$.

Анализ возникновения хаоса в сильно связанной полуклассической атомно-полевой системе в резонаторе был проведен в серии работ [4, 6, 11, 12] для различных механизмов модуляции коэффициента связи.

Он основан на мельниковском методе решений неавтономных динамических систем в окрестности их невозмущенных инвариантных многообразий. Уравнения Максвелла-Блоха (2) имеют две стационарные точки $S_{\pm} : x_s = y_s = e_s = p_s = 0, z_s = \pm 1$, которым соответствуют стационарные точки нелинейных уравнений Блоха (6) ($u_s = v_s = 0, z_s = \pm 1$). В отсутствие модуляции эти точки на плоскости $z-v$ соединяет замкнутая сепаратрисная кривая, у которой устойчивое и неустойчивое многообразия седловой точки S_+ совпадают. Модуляция, осуществляемая посредством того или иного физического механизма, приводит к расщеплению этого гомоклинического многообразия на две поверхности, которые трансверсально пересекаются бесконечно много раз на соответствующих сечениях Пуанкаре. Именно этот механизм формирования сложнейшей гомоклинической структуры в окрестности невозмущенной сепаратрисы и является причиной возникновения хаоса в атомно-полевых системах с модуляцией. Расстояние между устойчивым и неустойчивым многообразиями седловой особой точки S_+ определяет ширину возникающего на месте невозмущенной сепаратрисы стохастического слоя. Эта величина для нашей системы, вычисленная по методу Мельникова, имеет вид

$$M(\tau) \simeq \frac{2\pi |\delta| \beta^2}{\text{sh}(\pi\beta/\sqrt{4 - |\delta|^2})} \cos \beta\tau. \quad (9)$$

Из этой формулы следует несколько важных выводов. Расстояние между расщепленными поверхностями меняет знак с частотой модуляции β , и, следовательно, эти поверхности трансверсально пересекаются бесконечно много раз. Это происходит при сколь угодно малой (большой) величине β , однако ширина стохастического слоя экспоненциально быстро убывает для малых и больших β . Как и следовало ожидать, при точном резонансе, $\delta = 0$, поверхности не расщепляются, и движение полностью регулярно.

Хаос в детерминированных системах характеризуется прежде всего экспоненциальной чувствительностью движения к малым изменениям начальных условий. Мерой этой чувствительности являются показатели Ляпунова

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda(\tau), \quad \lambda(\tau) = \lim_{\Delta(0) \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\Delta(\tau)}{\Delta(0)}, \quad (10)$$

где $\Delta(\tau)$ – расстояние (в евклидовом смысле) в момент времени τ между двумя траекториями, близкими в начальный момент времени $\tau = 0$. Число показателей Ляпунова равно размерности системы. Если максимальный показатель Ляпунова больше нуля, то элемент фазового объема экспоненциально быстро

Рис.1. Максимальный показатель Ляпунова λ уравнения (2) в зависимости от логарифма скорости тепловых атомов β (в единицах $\Omega_0\sqrt{N}k_f$) и расстройки δ в единицах $\Omega_0\sqrt{N}$

растет в соответствующем направлении (и сокращается в другом, так как фазовый объем консервативной системы – инвариант).

Топографические карты максимального показателя Ляпунова рассчитывались для атомно-полевых систем с различными вариантами модуляции в наших работах [3, 4, 6, 13, 14, 5, 11]. На рис.1 приведена λ -карта для ридберговского атомного лазера с уравнениями движения (2) и начальным состоянием, $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 1, e_0 = p_0 = 1$, соответствующим полностью возбужденным атомам на входе в резонатор и плотностью среднего числа фотонов при $\tau = 0$, равной $n_0 = \frac{1}{2}$. Оттенками серого цвета обозначены положительные значения максимального показателя Ляпунова в соответствующих диапазонах значений обоих управляющих параметров, расстройки δ и частоты модуляции β . Область максимально неустойчивых осцилляций Раби движущихся атомов ограничена следующими диапазонами: $|\delta| \lesssim 2$ и $0.01 \lesssim \beta \lesssim 2$. Поскольку начальные значения атомных и полевых величин можно измерить лишь с конечной точностью (скажем, равной Δz_{in} для инверсии населенности на входе в резонатор), то состояние атомов на выходе в границах некоторого доверительного интервала Δz можно предсказать на время, не превышающее так

называемый горизонт предсказуемости (время расцепления корреляций):

$$\tau_c \simeq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\Delta z}{\Delta z_{in}}, \quad (11)$$

которое очень слабо зависит от величин Δz_{in} и Δz и, следовательно, является такой же характеристикой системы, как показатели Ляпунова. Поскольку максимальный доверительный интервал ограничен областью значений $|z| \leq 1$, а $\lambda_{max} \simeq 0.1$, то горизонт предсказуемости ридберговского атомного лазера может составлять $\tau_c \simeq 20 \div 30$ безразмерных единиц или $\simeq 20 \div 30$ осцилляций Раби.

Ридберговский атомный лазер является перспективным устройством для обнаружения проявлений динамического хаоса в фундаментальном процессе взаимодействия излучения с веществом. В многократно повторяемых опытах при одних и тех же условиях ансамбль атомов с помощью π -импульса лазера приготавливается в коллективном возбужденном состоянии с $z_{in} \simeq 1$. Состояние атомов на выходе, z_{out} , измеряется с помощью высокочувствительной техники селективной ионизации атомов [8]. Неизбежные погрешности приготовления начального состояния атомов, Δz_{in} , в регулярном режиме работы лазера порождают того же порядка величины погрешности на выходе, Δz_{out} . В хаотическом режиме происходит экспоненциальный рост начальной неопределенности, который на разумных временах приводит к полной неопределенности состояний атомов на выходе. Безразмерное время полета атомов с постоянной скоростью v_a сквозь микроволновый резонатор длиной $L = m\lambda_f$ (m – число длин волн) равно $\tau_{out} = 2\pi m/\beta$. Из формулы (11) следует, что даже ничтожная начальная погрешность атомного состояния, $\Delta z_{in} = 10^{-4}$, приведет к полной неопределенности на выходе, $\Delta z_{out} \simeq 2$, за время $\tau \simeq 200$ при $\lambda \simeq 0.05$. Если $\Delta z_{in} = 10^{-2}$, то уже за время $\tau \simeq 100$ вероятность получения любого значения z_{out} в интервале $[-1, 1]$ практически равна 1. Чтобы почувствовать разницу, достаточно сделать контрольный эксперимент при точном резонансе, $\delta = 0$, когда движение строго регулярно при любых начальных значениях и любых скоростях атомов. Приведенные рассуждения иллюстрирует рис.2, на котором приведена зависимость $\Delta z_{out}(\Delta z_{in})$ для очень малого $\Delta z_{in} = 10^{-4}$ в хаотическом режиме с $\lambda \simeq 0.04$. Для сравнения на вставке демонстрируется эта же зависимость для $-1 \leq \Delta z_{in} \leq 1$ в регулярном режиме с $\delta = 0$ при тех же прочих условиях.

Приведем характеристики хаотического режима, которые ожидаются для реальных ридберговских

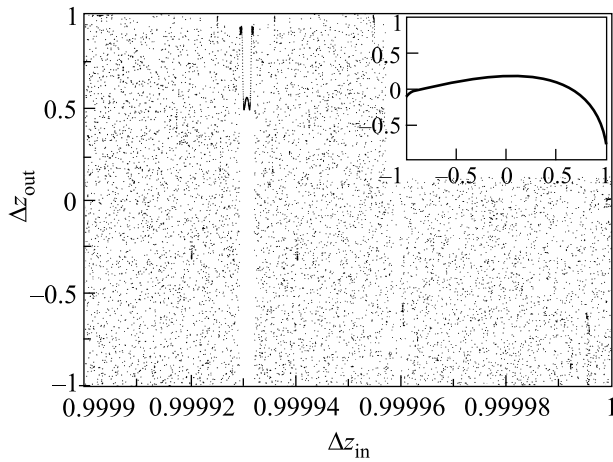


Рис.2. Хаотическое “расплывание” малой неопределенности инверсии населенности атомов на входе в резонатор $\Delta z_{in} = 10^{-4}$ на весь интервал допустимых значений на выходе Δz_{out} ($\beta = 0.1$, $\delta = 0.5$). Вставка: регулярная зависимость $\Delta z_{in}(\Delta z_{out})$ при точном резонансе ($\beta = 0.1$, $\delta = 0$)

атомных мазеров. В высокодобротном сверхпроводящем резонаторе с $Q \simeq 10^8$ и $L \simeq 1 \div 10$ см вакуумная частота ридберговского атома достигает значений $\Omega_0 \simeq 2\pi \cdot 10^5$ Гц [8]. Для $N = 10^6$ ридберговских атомов период коллективных осцилляций $T_R = 2\pi/\Omega_0\sqrt{N} \simeq 10^{-8}$ с, что значительно меньше всех времен декогерентности. В интервале расстройек $|\delta| \lesssim 2$ положительный максимальный показатель Ляпунова порядка $0.005 \lesssim \lambda \lesssim 0.1$ обнаружен в численных экспериментах в интервале значений безразмерной частоты модуляции $0.01 \lesssim \beta \lesssim 1$, что соответствует скоростям атомов $10^6 \lesssim v_a = 10^8\beta \lesssim 10^8$ см/с. Атом со скоростью $v_a \simeq 5 \cdot 10^6$ см/с пролетает десятисантиметровый резонатор за время порядка 2 мкс, что составляет примерно $\tau_{out} \simeq 200$ безразмерных единиц. Наши вычисления показывают, что примерно за это время происходит полное перемешивание и любое выходное значение z_{out} равновероятно.

Коротко остановимся на простейшей, на наш взгляд, схеме эксперимента по обнаружению проявлений полуклассического хаоса с атомами в резонаторах. Идея заключается в том, чтобы периодически включать и выключать поле в резонаторе по некоторому закону $f(t)$. Если задать эту модуляцию в виде $f(t) = \sin^2 \omega_m t$ и считать для простоты, что атом летит вдоль оси резонатора, по которой поле однородно, то можно воспользоваться практически всеми приведенными выше результатами. Уравнения Максвелла–Блоха имеют вид (2) с заменой $\sin \beta \tau \rightarrow \sin^2 \beta_1 \tau_1$, где $\tau_1 = \Omega_0 t$ – новая мера времени и $\beta_1 = \omega_m / \Omega_0$ –

безразмерная частота модуляции. Вычисления показывают, что максимальный показатель Ляпунова положителен в тех же диапазонах значений частоты модуляции и расстройки, что и на рис.1, но имеет несколько меньшие величины. Можно ожидать проявлений хаоса с *единственным атомом*, если частота включения-выключения поля $\omega_m = \beta_1 \Omega_0$ лежит в диапазоне $(0.01 \div 1)\Omega_0$ Гц. Результат “расплывания” малой начальной неопределенности инверсии атома имеет тот же характер, что и на рис.2. Приведем оценки для микромазера на ридберговских атомах (хотя подобный эксперимент возможен и с обычными атомами в микрорезонаторе). Пусть период вакуумных осцилляций Раби одного атома составляет $T_1 = 2\pi/\Omega_0 \simeq 2 \cdot 10^{-5}$ с, а частота модуляции поля $T_m = 2\pi/\omega_m \simeq 2 \cdot 10^{-4}$ с (то есть $\beta_1 \simeq 0.1$). Если по одиночке входящие в резонатор атомы имеют инверсии в интервале $\Delta z_{in} \simeq 0.01$, то при расстройке $|\delta| \simeq 1$ *любое* их состояние на выходе Δz_{out} в интервале $[-1, 1]$ практически равновероятно для $t \gtrsim 2 \cdot 10^{-3}$ с, то есть при $v_a \simeq 10^3$ см/с и $L \simeq 2$ см. Преимущества работы с одним атомом вполне очевидны – нет необходимости заботиться о создании монокинетической капли из большого числа одинаково приготовленных атомов. За исключением пульсирующего поля в резонаторе, схема и параметры предложенного эксперимента вполне стандартны (см. [8]).

Нами были рассмотрены варианты модуляции управляющих параметров для атомов, покоящихся в высокодобротном резонаторе. В работе [5] обнаружены параметрическая экспоненциальная неустойчивость и гамильтонов хаос для уравнений Максвелла–Блоха с модуляцией расстройки. Топографические λ -карты показывают четкую корреляцию зон хаоса и зон параметрических резонансов разного порядка. В работе [6] анализировалась полуклассическая модель атомно-полевого взаимодействия с модуляцией положения узлов стоячей волны, что можно осуществлять с помощью электрооптического модулятора, изменяя длину резонатора. Уравнения Максвелла–Блоха имеют практически тот же вид, что и (2) с функцией модуляции $1 + a \sin b\tau$, и их решения максимально неустойчивы примерно в тех же диапазонах безразмерной расстройки и частоты модуляции b , что и для движущихся атомов.

3. Холодный атом в микрорезонаторе Фабри-Перо. Энергия отдачи достаточно холодных атомов, взаимодействующих со светом видимого диапазона, сравнима с их кинетической энергией. В этом разделе описана нелинейная динамика простой полуклассической модели взаимодействия холодного атома с выделенной модой высокодоброт-

ного микрорезонатора Фабри-Перо. Если выбрать в качестве динамических переменных следующие квантовые средние значения: $\xi = k_f \langle \hat{x} \rangle$, $\rho = \langle \hat{p} \rangle / \hbar k_f$, $u = \langle \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+ \rangle$, $v = i \langle \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- - \hat{a} \hat{\sigma}_+ \rangle$, $z = \langle \hat{\sigma}_z \rangle$, то из гамильтониана (1) с $N = 1$ и модовой функцией $f(r) = -\cos k_f r$ получим замкнутую систему уравнений движения [15]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \alpha \rho, \quad \dot{\rho} = -u \sin \xi, \quad \dot{u} = \delta v, \\ \dot{v} &= -\delta u + [(2N_0 - 1)z - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}] \cos \xi, \\ \dot{z} &= -2v \cos \xi, \end{aligned} \quad (12)$$

где точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \Omega_0 t$, а управляющие параметры $\alpha = \hbar k_f^2 / m \Omega_0$, $\delta = (\omega_f - \omega_a) / \Omega_0$, и $N_0 = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} + (\hat{\sigma}_z + 1) / 2 \rangle$ являются нормированной частотой отдачи атома, нормированной расстройкой резонанса и числом возбуждений, соответственно. Система (12) обобщает соответствующие уравнения в [16, 17] на случай произвольных значений N_0 . Интеграл движения

$$E = \frac{\alpha \rho^2}{2} - u \cos \xi - \frac{\delta}{2} z \quad (13)$$

отражает сохранение энергии в задаче.

При точном резонансе, $\delta = 0$, медленные трансляционные переменные ξ и ρ отделяются от быстрых атомно-полевых u , v и z , система уравнений приобретает дополнительный закон сохранения, $u = \text{const}$, и интегрируется. Атом движется в пространственно периодическом оптическом потенциале $u_0 \cos \xi$, движение его центра масс описывается простым уравнением $\ddot{\xi} + \alpha u_0 \sin \xi = 0$ и в зависимости от значения энергии E атом совершает либо регулярные колебания в потенциальной яме, либо регулярный полет над вершинами холмов потенциала. Инверсия населенности атома удовлетворяет уравнению типа (8) и представляет собой регулярный сигнал осцилляций Раби, модулированный стоячей волной. В случае ненулевой расстройки трансляционное движение описывается уравнением

$$\ddot{\xi} + \alpha u(\tau) \sin \xi = 0, \quad (14)$$

в котором u является функцией времени и всех динамических переменных задачи. Для возникновения хаоса при движении атома в резонаторе со стоячей волной достаточно простейших гармонических колебаний u со временем. Принимая во внимание, что нормированная частота Раби есть величина порядка $\sqrt{\delta^2 + N_0} \gg 1$, значительно превышающая частоту малых трансляционных колебаний $\sim \sqrt{\alpha u_0}$, уравнения

для быстрых переменных из системы (12) для $N_0 \gg 1$ вырождаются в линейные уравнения блоховского типа

$$\dot{u} = \delta v, \quad \dot{v} = -\delta u + 2N_0 z \cos \xi, \quad \dot{z} = -2v \cos \xi, \quad (15)$$

в которых функцию $\cos \xi$ можно считать константой c на интервале времени многих осцилляций Раби. Общее решение этих уравнений для u имеет вид

$$\begin{aligned} u &= u_0 \left[N_0 \left(\frac{2c}{\Omega} \right)^2 + \left(\frac{\delta}{\Omega} \right)^2 \cos \Omega \tau \right] + \\ &+ \frac{\delta}{\Omega} v_0 \sin \Omega \tau + \frac{2N\delta c}{\Omega^2} z_0 (1 - \cos \Omega \tau), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Omega = \sqrt{\delta^2 + (2c)^2 N_0}$ – нормированная частота Раби. Для атома, полностью возбужденного на входе в резонатор, $z_0 = 1$, и произвольного состояния поля в резонаторе ($u_0 = v_0 = 0$) амплитуда осцилляции энергии атомно-полевого взаимодействия гармонически изменяется с частотой Раби. Нелинейный маятник с гармонической частотой модуляций (14) – классическая модель с гамильтоновым хаосом, возникающим в окрестности разрушенной невозмущенной сепаратрисы [18]. Проведенный нами в работе [15] расчет дает следующую оценку ширины стохастического слоя:

$$\Delta \simeq 8\pi (\Omega/\omega)^3 \exp(-\pi\Omega/2\omega), \quad (17)$$

где $\omega = \sqrt{2\alpha N_0 |\delta|} / \Omega$. Величина Δ есть нормированное на сепаратрисное значение $E_s = \omega^2$ изменение энергии невозмущенного движения. В нашем случае $\Omega/\omega \gg 1$. Заметим, что выражение (17) дает нижнюю границу ширины слоя, так как, вообще говоря, u является не гармоническим, а частотно и амплитудно модулированным сигналом. Малые изменения энергии приводят к относительно малым изменениям частоты. Для значений энергии движения, много меньших или много больших E_s , то есть вблизи дна потенциальных ям и высоко над вершинами потенциальных холмов, малые изменения частоты приводят к малым изменениям фазы за период трансляционных колебаний. Однако вблизи невозмущенной сепаратрисы, на которой период колебаний стремится к бесконечности, даже малые изменения частоты могут привести к значительным изменениям фазы. Это является причиной экспоненциальной неустойчивости движения параметрического нелинейного осциллятора (14) и, следовательно, хаотического движения атома в поле периодической стоячей волны.

Численные эксперименты подтверждают эти рассуждения. На рис.3 приведена λ -карта в зависимос-

Рис.3. Максимальный показатель Ляпунова λ уравнения (12) в зависимости от начальной скорости холодного атома v_a (в см/с) и расстройки δ (в единицах Ω_0)

ти от расстройки δ и начальной скорости атома v_a (см/с) для $N_0 = 10$ и $\alpha = 10^{-3}$. Другие λ -карты в координатах $v_a - \alpha$, $v_a - \delta$, $z_0 - v_a$, $\alpha - N_0$, вычисленные нами, позволили определить диапазоны значений управляющих параметров и начальных условий, для которых можно ожидать максимальной неустойчивости движения реальных атомов в микрорезонаторах, $\alpha \gtrsim 10^{-3}$, $N_0 \lesssim 10^2$ и $|\delta| \lesssim 2$. Условие сильной связи, $\Omega_0 T_{a,f}/2\pi \gtrsim 10^2$, в видимом диапазоне достигается для метастабильных $2S-2P$ переходов в гелии и магнии и $3S-3P$ перехода в кальции [19], помещенных в высокочастотный резонатор Фабри-Перо микронных размеров с $Q \gtrsim 10^6$, где $\Omega_0/2\pi \simeq 10^8$ Гц [10]. В экспериментах [10] с холодными атомами в таких резонаторах удалось создать атомную ловушку в поле одного фотона, зарегистрировать длинные полеты атома и его малые осцилляции в потенциальной яме. Заметим, что в этих экспериментах время наблюдения значительно превышало времена релаксации.

4. Атомные фракталы и полеты. Типичная хаотическая траектория холодного атома в резонаторе состоит из отрезков равномерного движения различной длины (так называемые полеты Леви), прерываемых случайными блужданиями. Подобная перемежаемость характерна для гамильтоновых систем с неоднородным фазовым пространством. Полеты Леви возникают из-за наличия “островов” в фазовом пространстве, к границам которых хаотическая траектория может “прилипнуть” на длительное время.

В замкнутой гамильтоновой системе с неоднородным фазовым пространством изображающая точка, лежащая на хаотической траектории, рано или поздно подойдет сколь угодно близко к инвариантной кривой (границе “острова”), отделяющей регулярное движение от хаотического. Вблизи такой границы $\lambda \rightarrow 0$ и частично разрушенные КАМ-торы (канторы) блокируют выход траектории в стохастическое “море”. Все это приводит к очень медленному уходу траектории от границы острова. Заметим, что полеты Леви случаются не только с частицами, движущимися в координатном пространстве. В пространстве внутренних переменных атома и поля они представляют собой длительные участки регулярных осцилляций этих переменных. Такие “полеты” обнаружены нами в сигналах осцилляций Раби и с холодными и с горячими атомами, летящими с постоянной скоростью. Заметим, что в осцилляциях Раби атомов, движущихся сквозь стоячую волну, и атомов, покоящихся в резонаторе с модуляцией его длины, возникают структуры, связанные с наличием узлов стоячей волны, в которых вакуумная частота Раби обращается в нуль. Эти структуры отчетливо видны как в самом сигнале [20], так и в его вейвлет-спектрах, что дает основание назвать такой хаос структурным [6, 12, 21].

Перемежаемость, полеты Леви, структуры кардинально изменяют статистические свойства хаотического движения [22, 23]. Движение преимущественно в области с полным перемешиванием ведет к нормальной диффузии с экспоненциальными функциями распределения, соответственно, гауссовской и пуассоновской для пространственной и временной диффузии. Перемежаемость приводит к аномальной диффузии с функциями распределения Леви с убыванием на крыльях по степенным законам и бесконечными моментами. В компьютерных экспериментах [24] было обнаружено, что положения холодного атома в оптическом потенциале эволюционируют со временем по закону $\langle \xi^{2m} \rangle \sim \tau^{\mu(m)}$, где транспортная экспонента $\mu(m)$, вообще говоря, различна в разные промежутки времени. Для нормальной диффузии транспортная экспонента второго момента равна единице, $\mu(1) = 1$. Показатель Ляпунова λ зависит от расстройки δ (см. рис.3), и его величина служит хорошей мерой перемешивания в системе. Для сравнительно большого λ (“хорошее перемешивание”) асимптотическое значение $\mu(1) \approx 1.13$ близко к нормальному. Для малых λ и слабого перемешивания получено асимптотическое значение $\mu(1) \approx 1.13$, соответствующее супердиффузии — баллистическому

движению атома с ускорением. На рис.4 изображена эволюция нескольких моментов $\langle |\xi|^{2m} \rangle$ для $\lambda \simeq 0.02$

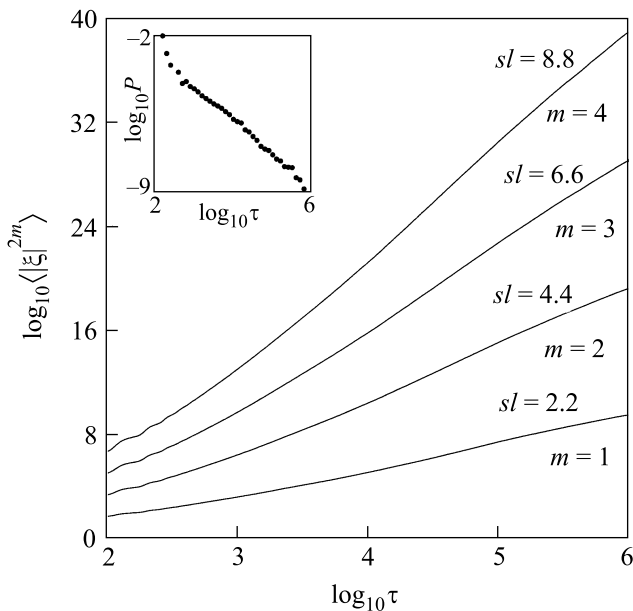


Рис.4. Эволюция моментов координаты холодного атома $\langle |\xi|^{2m} \rangle$ в дважды логарифмическом масштабе. Вставка: распределение времен возвратов Пуанкаре

(значения наклонов прямых приведены для $\tau \gtrsim 10^3$) [24]. В режиме супердиффузии отчетливо проявляется самоподобие, $\mu(km) = k\mu(m)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

По теореме Пуанкаре любая траектория замкнутой консервативной динамической системы (за исключением траекторий множества меры нуль) возвращается бесконечно много раз в любую окрестность своей начальной точки. Распределение времен этих возвратов является показательной статистической характеристикой хаотического движения. В случае “хорошего” перемешивания распределение носит пуассоновский характер, $P(\tau) = h^{-1} \exp(-h\tau)$, где h – энтропия Колмогорова-Синяя. Движение с перемежаемостью и полетами Леви приводит к степенному закону, $P(\tau) \sim \tau^{-\gamma}$, $\tau \rightarrow \infty$. На врезке рис. 4 показана алгебраическая асимптотика возвратов Пуанкаре с $\gamma \gtrsim 2$, являющаяся результатом длинных полетов Леви атомов. Экспоненты γ и μ связаны друг с другом.

Перемежаемая хаотическая динамика с полетами Леви порождает в гамильтоновой системе траектории с фрактальными свойствами. Установим на входе и выходе резонатора счетчики атомов, регистрирующие время вылета атома из резонатора τ_d . Помещаем в середину резонатора по одиночке атомы с заданными значениями начального импульса ρ_0 (и

прочими равными условиями) и вычисляем зависимость $\tau_d(\rho_0)$. Эта функция имеет явно фрактальный характер. Наряду с областями значений ρ_0 , где она гладкая, имеются такие области ρ_0 , где $\tau_d(\rho_0)$ в принципе неразрешима. Эти свойства повторяются при сколь угодно малом разрешении начального импульса (рис.5). Увеличение сложности кривой

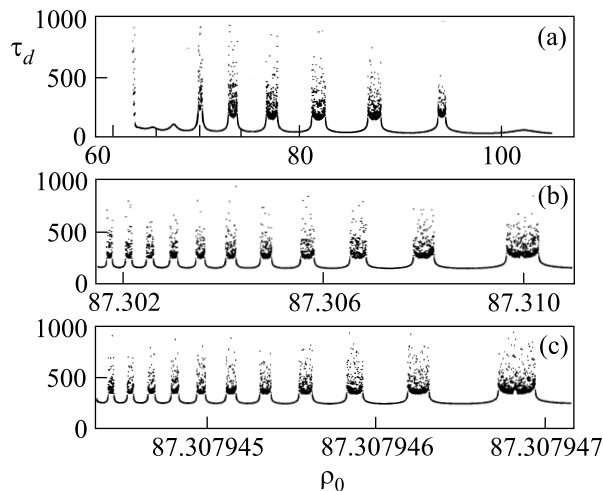


Рис.5. Время вылета холодного атома из резонатора τ_d (в единицах $1/\Omega_0$) в зависимости от его начального импульса (в единицах $\hbar k_f$) при последовательном увеличении разрешения

при уменьшении интервала разбиения ϵ есть следствие динамики атома в оптическом потенциале, а не нашего разрешения. Вычисление “длины” кривой $T = \sum_i |\tau_{d,i+1} - \tau_{d,i}|$ в зависимости от величины ϵ дает функцию $T(\epsilon) \sim \epsilon^{-d}$, где $d \simeq 1.2$ имеет смысл фрактальной размерности. Свойства такого фрактала – предмет отдельного исследования [25].

Подчеркнем, что хаотическое блуждание атома с полетами Леви появляется в полностью детерминированной системе. Процессы спонтанного излучения, в которых импульс атома меняется случайным образом, казалось бы должны приводить к гауссовскому процессу. Однако, это не всегда так. В экспериментах [26] по охлаждению атомов ниже уровня отдачи обнаружена статистика Леви с длительными участками постоянного значения импульса, перемежаемыми случайными скачками. Вероятность удержания атома в течение времени τ в малой окрестности $\rho = 0$ представляет собой широкое распределение, спадающее на крыльях по степенному закону настолько медленно, что среднее значение времени $\langle \tau \rangle$ расходится.

Двухуровневые атомы в высокодобротных резонаторах – идеальные объекты для исследования взаимосвязей микро-, мезо- и макромиров. Изменяя чис-

ло атомов (фотонов), расстройку резонанса, скорость спонтанного излучения и прочее, можно осуществлять переход от динамических режимов, в которых квантовые эффекты существенны, к таким, которые являются существенно классическими. В этом обзоре обсуждались исключительно полуклассические консервативные атомно-полевые системы. Дальнейшей задачей является квантовое описание этих систем и сравнение полуклассических и квантовых результатов для регулярной динамики и классического хаоса. Особый интерес представляет изучение влияния шума и диссипации (главным образом, спонтанного излучения) на квантовую динамику, которые приводят к разрушению квантовой интерференции и могут проявлять следы динамического хаоса соответствующего классического аналога.

Автор благодарен своим сотрудникам Л. Е. Конькову, В. Ю. Сироткину и М. Ю. Улейскому за помощь в численных расчетах. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты # 99-02-17269 и # 02-02-17796).

1. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
2. П. И. Белобров, Г. М. Заславский, Г. Х. Тартаковский, ЖЭТФ **71**, 1799 (1976) [Sov. Phys. JETP **44**, 945 (1976)].
3. S. V. Prants and L. E. Kon'kov, Phys. Lett. **A225**, 33 (1997).
4. S. V. Prants, L. E. Kon'kov, and I. L. Kirilyuk, Phys. Rev. **E60**, 335 (1999).
5. С. В. Пранц, Л. Е. Коньков, ЖЭТФ **115**, 740 (1999) [JETP **88**, 406 (1999)].
6. V. I. Ioussourov, L. E. Kon'kov, and S. V. Prants, Physica **D155**, 311 (2001).
7. F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 4598 (1995).
8. J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001); В. Т. Н. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger, and H. Walther, Nature **403**, 743 (2000).
9. B. Chirikov, Open Sys. & Information Dyn. **4**, 241 (1997).
10. C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty et al., Science, **287**, 1447 (2000); P. Münstermann, T. Fischer, P. Maunz et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 3791 (1999).
11. S. V. Prants and L. E. Kon'kov, Phys. Rev. **E61**, 3632 (2000).
12. С. В. Пранц, Оптика и спектроскопия **90**, 782 (2001) [Optics and Spectroscopy **90**, 701 (2001)].
13. S. V. Prants, L. E. Kon'kov, and E. V. Dmitrieva, Phys. Lett. **A237**, 283 (1998).
14. Л. Е. Коньков, С. В. Пранц, Письма в ЖЭТФ **65**, 801 (1997) [JETP Lett. **65**, 833 (1997)].
15. С. В. Пранц, Письма в ЖЭТФ **75**, 71 (2002) [JETP Lett. **75**, 63 (2002)].
16. С. В. Пранц, Л. Е. Коньков, Письма в ЖЭТФ **73**, 200 (2001) [JETP Lett. **73**, 180 (2001)].
17. S. V. Prants and V. Yu. Sirotkin, Phys. Rev. **A64**, 3412 (2001).
18. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников, Слабый хаос и квазирегулярные структуры, М.: Наука, 1991. [G. M. Zaslavsky, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and A. A. Chernikov, *Weak Chaos and Quasiregular Patterns*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1991].
19. C. S. Adams, M. Sigel, and J. Mlynek, Phys. Rep. **240**, 143 (1994).
20. S. V. Prants, Phys. Rev. **E61**, 1386 (2000).
21. С. В. Пранц, В. И. Юсупов, Квантовая электроника **30**, 647 (2000) [Quantum Electronics **30**, 647 (2000)].
22. C. F. Karney, Physica **D8**, 360 (1983); B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky, Physica **D13**, 394 (1984).
23. M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and J. Klafter, Nature **363**, 31 (1993).
24. S. V. Prants, M. Edelman, and G. M. Zaslavsky, Phys. Rev. **E** (to be submitted).
25. S. V. Prants and V. Yu. Sirotkin, Phys. Rev. Lett. (to be submitted).
26. F. Bardou, J. P. Bouchaud, O. Emile et al., Phys. Rev. Lett. **72**, 203 (1994).